2.4.6 Hookův zákon

Předpoklady: 2405

Pro hodnoty normálového napětí menší než σ_U je relativní prodloužení přímo úměrné normálovému napětí $\Rightarrow$ $\varepsilon = k\sigma$.
Přímá úměrnost platí i obráceně: normálové napětí je přímo úměrné relativnímu prodloužení: $\sigma = K \cdot \varepsilon \Rightarrow$ **Hookův zákon** (konstanta úměrnosti se značí E): $\sigma = E \cdot \varepsilon$.

- σ [Pa] – normálové napětí
- ε [nemá jednotku] – relativní prodloužení
- E [Pa] –konstanta úměrnosti = **Youngův modul pružnosti (modul pružnosti v tahu)**

Výhoda vzorce $\sigma = K \cdot \varepsilon$ - jednoduchost.
Nevýhoda vzorce $\sigma = K \cdot \varepsilon$ - za měsíc nikdo nebude vědět, co znamenají řecká písmena $\Rightarrow$ jiný tvar (po dosazení $\sigma = \frac{F}{S}$ a $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$): $\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l_0}$ (v tabulkách častěji $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E}\frac{F}{S}$).

Hookův zákon: Pro hodnoty normálového napětí menší než σ_U je normálové napětí přímo úměrné relativnímu prodloužení $\sigma = E \cdot \varepsilon$. Hookův zákon také zapisujeme ve tvaru $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E}\frac{F}{S}$.

Hodnoty modulu pružnosti v tahu (často se rovnají hodnotě modulu pružnosti v tlaku)

látka	ocel	hliník	dural	zlato	bakelit	dřevo smrkové po směru vláken
$E\left[10^3\ \mathrm{MPa}\right]$	220	66-68	72	80	9-15	10

Př. 1: Mez úměrnosti ocele je 310 MPa. Urči, o kolik procent se při tomto zatížení ocel natáhne.

$\sigma = 310\ \mathrm{MPa} = 3{,}1 \cdot 10^8\ \mathrm{Pa}$, $E = 220 \cdot 10^3\ \mathrm{MPa} = 2{,}2 \cdot 10^{11}\ \mathrm{Pa}$, $\varepsilon = ?$

$\sigma = E \cdot \varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{3{,}1 \cdot 10^8}{2{,}2 \cdot 10^{11}} = 1{,}4 \cdot 10^{-3} = 0{,}14\%$$

Ocel se při dosažení meze úměrnosti natáhne pouze o 0,14%.

Př. 2: Konstanta úměrnosti E má stejně jako normálové napětí jednotku Pa. Jde tedy také o určitou hodnotu normálového napětí. Urči jeho význam.

Kdy platí $\sigma = E$?
Když $\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot 1 \Rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = 1 \Rightarrow \Delta l = l_0 \Rightarrow$ prodloužení lana je stejné jako jeho původní velikost. $\Rightarrow$ Youngův model pružnosti udává hodnotu normálového napětí, které by látku prodloužilo na dvojnásobek své délky.

Dodatek: Většina materiálů se přetrhne dříve než tohoto napětí dosáhne. Určit konstantu úměrnosti z daleko menších hodnot ε a σ však není problém.

Př. 3: O kolik se prodlouží lano výtahu stojícího v přízemí, pokud má dům čtyři patra a nastoupí do něj čtyři cestující s nejvyšší povolené hmotnosti 250 kg? Potřebné údaje najdi v tabulkách, změř nebo odhadni. O kolik by se za stejných podmínek prodloužilo lano o délce 800 m (výška nejvyšší budovy světa)?

Musíme zjistit:
Délka lana: výška patra asi 3,5 m, lano musí mít délku čtyř pater (ve skutečnosti ještě o něco více) $\Rightarrow$ $l_0 = 4 \cdot 3{,}5\,\mathrm{m} = 14\,\mathrm{m}$.
Poloměr výtahového lana: 2 cm.
$m = 250\,\mathrm{kg}$, $l_0 = 14\,\mathrm{m}$, $E = 220 \cdot 10^3\ \mathrm{MPa} = 2{,}2 \cdot 10^{11}\ \mathrm{Pa}$, $r = 2\,\mathrm{cm} = 2 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$, $\Delta l = ?$

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\Delta l = \frac{Fl_0}{ES} = \frac{mgl_0}{E\pi r^2}$$

$$\Delta l = \frac{mgl_0}{E\pi r^2} = \frac{250 \cdot 10 \cdot 14}{2{,}2 \cdot 10^{11} \cdot \pi \cdot \left(2 \cdot 10^{-2}\right)^2}\,\mathrm{m} = 1{,}3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} = 0{,}13\,\mathrm{mm}$$

Lano výtahu se prodlouží o 0,13 mm.
Prodloužení lana o délce 800 m:

$$\Delta l = \frac{mgl_0}{E\pi r^2} = \frac{250 \cdot 10 \cdot 800}{2{,}2 \cdot 10^{11} \cdot \pi \cdot \left(2 \cdot 10^{-2}\right)^2}\,\mathrm{m} = 7{,}2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = 7{,}2\,\mathrm{mm}$$ $\Rightarrow$ ani v nejvyšší budově světa by protažení lana nehrálo velkou roli.

Př. 4: Gumička o čtvercovém průřezu 2x2 mm se prodlouží po zavěšení 100 g závaží přibližně o čtvrtinu své délky. Urči její modul pružnosti v tahu.

Která veličina je dána v informaci „prodlouží se přibližně o čtvrtinu délky“? Jde změnu délky vzhledem k původní délce $\Rightarrow$ relativní prodloužení.
$m = 100\,\mathrm{g} = 0{,}1\,\mathrm{kg}$, $a = 2\,\mathrm{mm} = 2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$, $\varepsilon = 0{,}25$, $E = ?$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \ \Rightarrow\ E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\frac{F}{S}}{\varepsilon} = \frac{F}{S\varepsilon} = \frac{mg}{a^2\varepsilon}$$

$$E = \frac{mg}{a^2\varepsilon} = \frac{0{,}1 \cdot 10}{\left(2 \cdot 10^{-3}\right)^2 \cdot 0{,}25}\,\mathrm{Pa} = 1 \cdot 10^6\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{MPa}$$

Modul pružnosti v tahu pro zadanou gumičku je 1 MPa (o pět řádů menší než modul pevnosti v tahu pro ocel).

Př. 5: Porovnej vlastnosti požadované po materiálu na nosné lanu výtahu s vlastnostmi materiálu pro horolezecké lano. Které materiály na výrobu zmíněných lan používají?

Nosné lano pro výtah: velká pevnost v tahu, velký modul pružnosti v tahu (aby se lano málo prodloužilo při zatížení) $\Rightarrow$ ocel.

Horolezecké lano: velká pevnost v tahu, nízká hmotnost a malý modul pružnosti v tahu (aby se lano snadno prodloužilo a tím se prodloužila doba, po kterou brzdí případný pád a zmenšila se tak rázová síla) $\Rightarrow$ polyamid.

Pedagogická poznámka: Není reálné, že by Vám při hodině zbylo více než 5 minut na následující příklad. Nakonec je to asi ideální, stačí, když studenty s příkladem seznámíte a necháte je, aby se s převodem potrápili doma (pokud budou chtít). Určitě byste ale neměli příklad vynechat, je skvělou ukázkou toho, že najít se dál skoro všechno, ale vydolovat z nalezeného užitečnou informaci je někdy značný problém.

Př. 6: Na wikipedii je možné v článcích o polyamidech najít následující údaje. Urči z nich pevnost polyamidů v MPa a odhadni (pomocí výpočtu) jejich modul pružnosti.

Vlákno	Pevnost v tahu cN/dtex	Hustota g/ccm	tažnost %
PA 6	6	1,13	max. 24
PA 66	6	1,14	max. 31
p-aramid	19	1,45	
ocel	3,5	7,8	

Tex je jednotka užívaná v textilním průmyslu pro jemnost příze. Fyzikálně představuje délkovou hustotu, tedy hmotnost určité délky příze. Jednotku tex, představující gramy na kilometr délky (nebo také miligramy na metr), lze do soustavy SI přepočítat podle vzorce $\mathrm{tex} = \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{km}} = \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{m}}$.

Převedeme si pevnost v tahu blíže k jednotkám SI: $6\frac{\mathrm{cN}}{\mathrm{dtex}} = 6\frac{0{,}01\,\mathrm{N}}{0{,}1\mathrm{tex}} = \frac{0{,}6\,\mathrm{N}}{\mathrm{tex}}$ $\Rightarrow$ na vlákno působí síla 0,6 N $\Rightarrow$ musíme určit jeho průřez.

Hmotnost vlákna: $m = V\rho = Sl\rho \Rightarrow S = \frac{m}{\rho l}$.

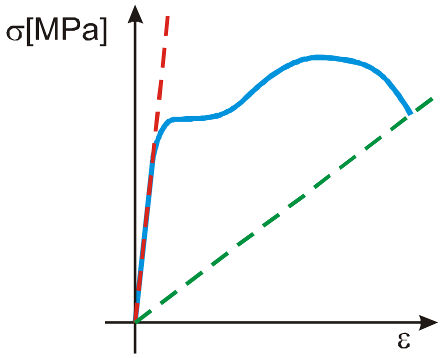
Dosadíme do vztahu pro normálové napětí: $\sigma = \frac{F}{S} = \frac{F\rho l}{m}$.

- Pro PA 66 dosadíme: $m = 1\,\mathrm{g} = 10^{-3}\,\mathrm{kg}$, $l = 1\,\mathrm{km} = 10^3\,\mathrm{m}$, $\rho = 1140\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, $F = 0{,}6\,\mathrm{N}$
  $\sigma = \frac{F\rho l}{m} = \frac{0{,}6\cdot 1140\cdot 10^3}{10^{-3}}\,\mathrm{Pa} = 6{,}84\cdot 10^8\,\mathrm{Pa} = 684\,\mathrm{MPa}$
- Ověříme si vztah pro ocel: $m = 1\,\mathrm{g} = 10^{-3}\,\mathrm{kg}$, $l = 1\,\mathrm{km} = 10^3\,\mathrm{m}$, $\rho = 7800\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, $F = 0{,}35\,\mathrm{N}$
  $\sigma = \frac{F\rho l}{m} = \frac{0{,}35\cdot 7800\cdot 10^3}{10^{-3}}\,\mathrm{Pa} = 2{,}73\cdot 10^9\,\mathrm{Pa} = 2730\,\mathrm{MPa}$ - značně přesahuje námi používanou hodnotu pro speciální ocel pro lana $2000\,\mathrm{MPa}$, ale s rezervou můžeme použít jako odpovídající hodnotu.
- Pro PA 6 dosadíme: $m = 1\,\mathrm{g} = 10^{-3}\,\mathrm{kg}$, $l = 1\,\mathrm{km} = 10^3\,\mathrm{m}$, $\rho = 1130\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, $F = 0{,}6\,\mathrm{N}$
  $\sigma = \frac{F\rho l}{m} = \frac{0{,}6\cdot 1130\cdot 10^3}{10^{-3}}\,\mathrm{Pa} = 6{,}78\cdot 10^8\,\mathrm{Pa} = 678\,\mathrm{MPa}$

- Pro p-aramid dosadíme: $m = 1\,\mathrm{g} = 10^{-3}\,\mathrm{kg}$, $l = 1\,\mathrm{km} = 10^{3}\,\mathrm{m}$, $\rho = 1450\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, $F = 1{,}9\,\mathrm{N}$

  $$\sigma = \frac{F\rho l}{m} = \frac{1{,}9\cdot 1450\cdot 10^{3}}{10^{-3}}\,\mathrm{Pa} = 2{,}76\cdot 10^{9}\,\mathrm{Pa} = 2760\,\mathrm{MPa}$$

Zkusíme odhadnout modul pružnosti v tahu pro PA 66.
Víme:
$\sigma = 684\,\mathrm{MPa}$, tažnost 31% $\Rightarrow$ v okamžiku, kdy vlákno praskne je natažené na 31% své původní délky $\Rightarrow$ na protažení na 100% délky by bylo teoreticky potřeba přibližně 3x větší napětí $\Rightarrow$ $3\cdot 684\,\mathrm{MPa} \doteq 2000\,\mathrm{MPa}$.



Deformační křivka není přímka. Neznáme přesný tvar deformační křvky pro PA66, ale přibližnou představu si zkusíme udělat z deformační křivky ocele.
Spočtená hodnota 2000 MPa odpovídá zelené čárkované čáře (lineární závislost relativného prodloužení od nulového napětí až po mez pevnosti).
Ve skutečnosti jsou obě veličiny přímo úměrnou pouze v části závislosti (červená čárkovaná čára) a tato závislost je podstatně strmější $\Rightarrow$ skutečná hodnota modulu pružnosti bude násobně větší (nevíme kolikrát) $\Rightarrow$ pro modul pružnosti v tahu bychom mohli očekávat hodnoty od 4000 MPa do 10000 MPa.

Údaje z jiných zdrojů:
Polymerní materiály Ing. Tomáš Křenek Ph.D. ZCU

Vlákno	Pevnost v tahu MPa	Modul pružnosti MPa	tažnost
PA 6	45-50	900- 1400	200 – 300
PA 66	55-60	1700 - 2000	120 – 300

Kompozity, doc. Ing. Zdeněk Kořínek, CSc. FS ČVUT

Vlákno	Pevnost v tahu MPa	Modul pružnosti MPa	tažnost
PA 66	900	5000	13,5

Člověk by neřekl, že se jedná stále o stejnou látku. Každopádně, když budeme chtít vědět, jaká je pevnost v tahu PA 66 asi bude nejjednodušší si koupit vlasec a změřit si to svépomocí.

Pedagogická poznámka: Ani další vyhledávání na internetu (zejména na anglicky psaných stránkách) situaci nezpřehlednilo. Opět je možné získat velký rozptyl hodnot (pro pevnost v tahu dokonce i ještě větších než 900 MPa). Zřejmě samotné označení PA66 je v dnešní době příliš široký pojem na to, aby se z něj dalo konkrétněji usuzovat na vlastnosti látky.
Změření a porovnání vlastností konkrétního vlasce a konkrétního ocelového drátu je každopádně dobrým námětem na samostatnou laboratorní práci (nebo spíše projekt).

Shrnutí: Přímá úměrnost mezi relativním prodloužením a normálovým napětím nám ve formě Hookova zákona umožňuj předpovídat prodloužení natahovaných předmětů.