1.1.9 Rovnoměrný pohyb IV

Předpoklady: 1108

V jedné z minulých hodin jsme odvodili vztah pro dráhu (nebo polohu) rovnoměrného pohybu $s = vt$ (dráha je přímo úměrná rychlosti a času).

Př. 1: Karel a Honza se účastní dálkového pochodu, který má dva starty. Start zkrácené verze pochodu je na desátém kilometru celé trasy. Od tohoto místa se obě trasy shodují. Karel i Honza vyrazí ve stejném okamžiku, Honza na zkrácenou trasu, Karel na celou. Oba jsou rovnoměrně rychlostí 5 km/h.
a) Jakou vzdálenost ujdou oba turisté po dvou hodinách?
b) Jak daleko budou pod dvou hodinách od startu kompletní trasy?
c) Najdi vzorce pro vzdálenost obou turistů od startu kompletní trasy v libovolném čase.

a) Jakou vzdálenost ujdou oba turisté po dvou hodinách?
Dosadíme do vzorce: $s = vt = 5 \cdot 2\,\text{km} = 10\,\text{km}$.
Karel i Honza šli stejnou rychlostí, takže oba ušli 10 km.

b) Jak daleko budou pod dvou hodinách od startu kompletní trasy?
Karel začínal na startu kompletní trasy $\Rightarrow$ po 2 hodinách je od startu vzdálen 10 km
Honza začínal na startu zkrácené trasy $\Rightarrow$ po 2 hodinách ušel 10 km, ale už když startovat byl od startu kompletní trasy 10 km $\Rightarrow$ po dvou hodinách chůze je od startu vzdálen $10 + 10\ \text{km} = 20\,\text{km}$

c) Najdi vzorce pro vzdálenost obou turistů od startu kompletní trasy v libovolném čase.
Karel:
vzdálenost od startu kompletní trasy se v libovolném okamžiku rovná dráze, kterou ušel $\Rightarrow$
$s_K = vt = 5t$
Honza:
vzdálenost od startu kompletní trasy se v libovolném okamžiku rovná součtu dráhy, kterou ušel, a 10 km, které byl od startu vzdálen ve chvíli, kdy začínal pochod ze zkráceného startu $\Rightarrow$ $s_H = vt + 10 = 5t + 10$

Vzorec, který jsme napsali pro vzdálenost Honzy od startu kompletní trasy je kompletním vzorcem pro polohu rovnoměrného pohybu: $s = s_0 + vt$.

Polohu rovnoměrného pohybu vyjadřujeme vzorcem $s = s_0 + vt$, kde s_0 představuje polohu na počátku pohybu.

Prostudujeme si vzorec:
s - poloha v určitém čase, s_0 - poloha na v čase $t = 0\,\text{s}$, vt - uražená dráha, změna polohy
$\Rightarrow$ všechny tři členy, které ve vzorci sčítáme a porovnáváme mají význam stejné fyzikální veličiny – vzdálenosti

Porovnávat nebo sčítat (odčítat) můžeme ve fyzikálních vztazích pouze členy, které mají význam stejné fyzikální veličiny (mají stejnou jednotku).

$\Rightarrow$ obrovský význam při úpravách vzorců. Vzorec může být správně, pouze když splňuje tuto podmínku.
Například:

- $v = v_0 + \frac{s}{t}$: může být správný vzorec, členy v a v_0, jsou rychlosti, zlomek $\frac{s}{t}$ má také význam rychlosti
- $v = v_0 t + \frac{s}{t}$: nemůže být správný vzorec, členy v a $\frac{s}{t}$ mají význam rychlosti, nemůžeme je sčítat se členem $v_0 t$, který má význam dráhy

Př. 2: Rozhodni, které z následujících vztahů mohou být správné. Rozhodnutí zdůvodni.

a) $t = t_0 + \frac{s}{v}$ b) $\frac{m}{V} = \rho + \frac{m_0}{V_0}$ c) $V = 2a^3$ d) $S = a^2 + a^3$

e) $\frac{s - s_0}{v} - t_0 = \frac{t}{t_0}$ f) $V = \pi r^2 v + 2\pi r v$ g) $\frac{s - v_0}{t} + v_0 = v$

a) $t = t_0 + \frac{s}{v}$ - možná správný vzorec, člen $\frac{s}{v}$ má stejně jako členy t a t_0 význam času

b) $\frac{m}{V} = \rho + \frac{m_0}{V_0}$ - možná správný vzorec: členy $\frac{m}{V}$ a $\frac{m_0}{V_0}$ mají význam hustoty

c) $V = 2a^3$ - možná správný vzorec: objem je třetí mocnina délky

d) $S = a^2 + a^3$ - určitě špatný vzorec: plocha je druhá mocnina délky, a^3 má význam objemu

e) $\frac{s - s_0}{v} - t_0 = \frac{t}{t_0}$ - určitě špatný vzorec: členy na levé straně mají význam času, ale zlomek na pravé straně nemá význam času, jde o bezrozměrný poměr (číslo, které říká kolikrát je jeden čas delší než druhý, se neudává v hodinách)

f) $V = \pi r^2 v + 2\pi r v$ - určitě špatný vzorec: člen $2\pi r v$ nemá význam objemu (pouze druhá mocnina délky)

g) $\frac{s - v_0}{t} + v_0 = v$ - určitě špatný vzorec: v čitateli zlomku odečítáme rychlost od dráhy

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je dobré nechat studentům na delší dobu, ale na následující část hodiny je potřeba alespoň 20 minut.
Podrobnější diskuse je nutná u bodu e), kde někteří studenti jen těžce chápou, že podílem dvou časů není čas, ale číslo, které říká, kolikrát je jeden z času větší než druhý. Pomáhají konkrétní příklady.

Pedagogická poznámka: Následující příklad vyřeší většina studentů úvahou samostatně, se sestavováním rovnice je nutné pomáhat pomalu na tabuli.

Př. 3: Petr s Hankou šli společně na výlet. V Kutimovicích potkal Petr svého kamaráda a řekl sestře, aby šla dál, že ji dohoní. Kdy a kde ji dohonil, když z Kutimovic vyrazil o půl hodiny později a pospíchal rychlostí 8 km/h, zatímco sestra pokračovala

pomalou chůzí 4 km/h? Příklad řeš:
a) úvahou b) sestavením rovnice

a) úvahou
Hanka vyjde z Kutimovic dříve než její bratr. Získá tak náskok, který její bratr musí dohonit. Nejdřív si spočítáme o kolik uteče Hana bratrovi, protože se pohybuje půl hodiny rychlostí 4 km/h, získá náskok dva kilometry. Tento náskok bude bratr dohánět rychlostí 4 km/h (je to rozdíl rychlosti Petra a Hanky). Její náskok tedy dožene za půl hodiny. Příklad je vyřešen.

b) pomocí rovnice
$s_H = s_P$ (oba sourozenci ve chvíli setkání urazili z Kutimovic stejnou vzdálenost)
$v_H t_H = v_P t_P$ (oba sourozenci se pohybovali rovnoměrně)
Stále máme dvě neznámé veličiny. Petr vyrazil z Kutimovic o půl hodiny později než Hanka, která tedy šla o půl hodiny déle a tak platí: $t_H = t_P + 0,5$, dosadíme:
$v_H (t_P + 0,5) = v_P t_P$ (v rovnici známe všechny členy kromě t_P, které z ní můžeme vyjádřit)
$v_H t_P + 0,5 v_H = v_P t_P$
$0,5 v_H = v_P t_P - v_H t_P$
$0,5 v_H = (v_P - v_H) t_P$
$$t_P = \frac{0,5 v_H}{(v_P - v_H)}$$
Provedeme kontrolu správnosti našeho řešení. Na levé straně rovnice je čas, výraz na pravé straně rovnice musí mít také význam času. A opravdu ho má, na pravé straně je zlomek, v jehož čitateli je výraz $0,5 v_H$, který má význam dráhy (0,5 je půlhodina Hančina náskoku), jeho čitateli je rozdíl rychlostí, tedy zase nějaká rychlost. Podíl $\frac{s}{v}$ má opět význam času. $\Rightarrow$ výsledný vztah může být správně
$$t_P = \frac{0,5 v_H}{(v_P - v_H)} = \frac{0,5 \cdot 4}{8-4}\,\mathrm{h} = 0,5\,\mathrm{h}$$
$s_P = v_P t_P = 8 \cdot 0,5\ \mathrm{km} = 4\ \mathrm{km}$
Petr dohnal Hanku za půl hodiny ve vzdálenosti 4 km od Kutimovic.

Pedagogická poznámka: U předchozího i několika dalších příkladů v několika následujících hodinách by samozřejmě bylo lepší, kdyby studenti dokázali řešit příklady obecně. Bohužel jejich matematické schopnosti jsou po příchodu ze základní školy v posledním období čím dál horší a tak je nutné považovat za úspěch, když budou schopni řešit tyto příklady i okamžitým dosazením takto:
$s_H = s_P$
$v_H t_H = v_P t_P$
$4(t_P + 0,5) = 8 t_P$
$4t + 2 = 8t$
$4t = 2$
$t = 0,5$
Podobný způsob řešení se používá u těžších příkladů i v matematice.

Dodatek: Ve skutečnosti jsme dvěma různými způsoby, získali stejné výsledky. Protože čitatel zlomku $0,5v_H$ je vlastně Hančin náskok a rozdíl $v_P - v_H$ je rychlost, kterou Petr Hanku doháněl.

Poznámka: Trochu manuálnějším typem této kontroly výsledného vztahu je „rozměrová zkouška“. Do výrazu vpravo dosadíme za jednotlivé veličiny jejich jednotky. Po úpravě musí vyjít jednotky veličiny na levé straně. $\frac{0,5v_H}{(v_P - v_H)} = \frac{\mathrm{h} \cdot \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = \mathrm{h}$. Čas se měří v hodinách, zkouška tedy vyšla.

Poznámka: Důležité je si uvědomit, že pokud „rozměrová zkouška“ vyjde, neznamená to, že výsledek je správný. Z rozměrové zkoušky pouze vyplývá, že když nevyjde výsledek je špatně.
Rozměrovou zkoušku nemusíme provádět pouze u konečného výrazu. Můžeme ji použít i pro hledání chyby v kterémkoliv místě výpočtu. Například také v rovnici $0,5v_H = v_P t_P - v_H t_P$, musejí mít (a také mají) všechny členy stejný význam, význam dráhy.

Dodatek: Jinak postup obecného řešení není jediný ani jednoznačný. Mohli bychom postupovat i takto:

$$s_H = s_P$$
$$v_H t_H = s_P$$
$$v_H (t_P + 0,5) = s_P$$
$$v_H \left(\frac{s_P}{v_P} + 0,5 \right) = s_P$$ a nyní vyjádřit s_P……

Řešení předchozího příkladu uvedeme i ve formě, která je použita u většiny příkladů ve sbírce fyzikálních úloh:
Nejdříve si uděláme výpis známých a neznámých veličin. Doporučuji používat, co nejvíce indexů, které nám ukazují, koho se veličina týká. V našem příkladě budeme používat index $_P$ pro veličiny, které se týkají Petra, index $_H$ patří Hance.

Výpis veličin:

$v_H = 4\,\mathrm{km/h}$, $v_P = 8\,\mathrm{km/h}$, $t = 0,5\,\mathrm{h}$, $s_H = ?$, $s_P = ?$, $t_H = ?$, $t_P = ?$

Díky výpisu veličin si můžeme uvědomit, které veličiny známe a které potřebujeme spočítat. Důležité je také to, že abychom příklad dokázali vyřešit musíme získat rovnici, ve které bude pouze jedna neznámá veličina. Ve výpisu pak snadno najdeme veličiny, které v naší rovnici můžeme nechat i ty, kterých se musíme „zbavit!
Druhou věcí, která se provádí v rámci výpisu veličin je převádění jednotek. Nejjistější je převést všechny hodnoty veličin na základní jednotky SI. Pokud to neuděláme (jako v tomto případě), musíme používat slučitelné jednotky. Například pokud udáváme rychlost v km/h, musíme udávat všechny časy v hodinách a všechny vzdálenosti v km.

Fyzikální rozbor situace:

Petr i Hanka se pohybují přibližně rovnoměrným pohybem. Vzdálenost, kterou urazí, je tedy dána jako dráha rovnoměrného pohybu. Ve chvíli, kdy Petr Hanku dohoní ujdou oba z Kutimovic stejnou vzdálenost.

V rozboru situaci si musíme ujasnit o jaké fyzikální děje se v příkladu jedná (rovnoměrný pohyb). Zároveň bysme měli najít nejzákladnější rovnici, ze které začneme odvozovat (Petr ujde stejnou vzdálenost).

Obecné řešení:
V této části vyjdeme ze základní rovnice a postupně se snažíme nahrazovat neznámé veličiny tak, aby nám zbyla rovnice, ve které je pouze jedna neznámá veličina, kterou pak můžeme z rovnice vyjádřit.
Vycházíme z rovnice:
Stále máme dvě neznámé veličiny. Petr vyrazil z Kutimovic o půl hodiny později než Hanka, která tedy šla o půl hodiny déle a tak platí: $t_H = t_P + 0,5$, dosadíme:

$v_H(t_P + 0,5) = v_P t_P$ (v rovnici známe všechny členy kromě t_P, které z ní můžeme vyjádřit)

$$v_H t_P + 0,5 v_H = v_P t_P$$

$$0,5 v_H = v_P t_P - v_H t_P$$

$$0,5 v_H = (v_P - v_H) t_P$$

$$t_P = \frac{0,5 v_H}{(v_P - v_H)}$$

Dosazení:

$$t_P = \frac{0,5 v_H}{(v_P - v_H)} = \frac{0,5 \cdot 4}{8 - 4}\,\mathrm{h} = 0,5\,\mathrm{h}$$

Do odvozeného vztahu dosadíme již převedené hodnoty z výpisu známých veličin.

$$s_P = v_P t_P = 8 \cdot 0,5\ \mathrm{km} = 4\ \mathrm{km}$$

Odpověď:
Petr dohonil Hanku po půlhodině ve vzdálenosti 4 km od Kutimovic.

Shrnutí: Porovnávat nebo sčítat (odčítat) můžeme ve fyzikálních vztazích pouze členy, které mají význam stejné fyzikální veličiny (mají stejnou jednotku).