

2 - FUNKCE A ROVNICE

Následující základní znalosti je nezbytně nutné umět od okamžiku probrání až do konce studia matematiky na gymnáziu. Vyžadováno bude porozumění a schopnost aplikovat ne pouze mechanicky zopakovat.

Některé body neodpovídají přesně červeným rámečkům v textu poznámek, protože jde například o spojení nebo generalizaci několika míst, nic to však nemění na platnosti předchozího odstavce.

2.1 -

Funkce je předpis, který nám říká, jak něčemu přiřadit reálné číslo (nakreslit šipku od něčeho k reálnému číslu). Aby bylo přiřazování jednoznačné, musí od čehokoliv vést pouze jedna šipka.

2.2 -

Lineární funkce je každá funkce, která jde zapsat ve tvaru $y = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Grafem lineární funkce je přímka (část přímky).

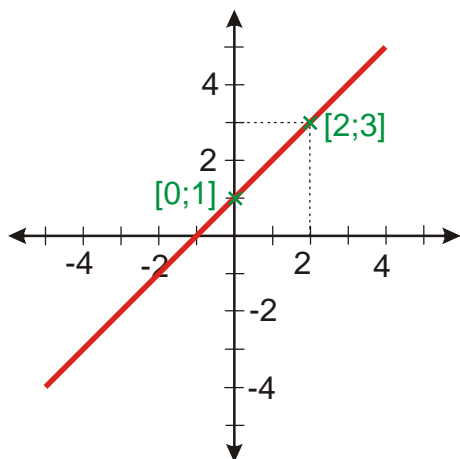
Konstanta a určuje u grafu funkce směr, konstanta b posunutí ve svislém směru.

Graf nakreslím pomocí dvou bodů ze dvojího dosazení za x :

$$y = x + 1$$

$$x = 0 \Rightarrow y = x + 1 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow \text{bod } [0;1]$$

$$x = 2 \Rightarrow y = x + 1 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow \text{bod } [2;3]$$



2.3 -

$3x - 1 = \frac{2x + 6}{2}$ - rovnost dvou výrazů, za x můžeme dosazovat různá čísla, tím měníme

hodnoty obou výrazů, hledáme takové x , aby rovnost platila,

z této rovnice není vidět správné x , upravíme rovnost, tak aby dál platila a x bylo lépe vidět

Úpravy, které můžu dělat:

- musí z rovnajících se čísel vyrobit rovnající se čísla
- nesmí z nerovnajících čísel vyrobit rovnající se čísla

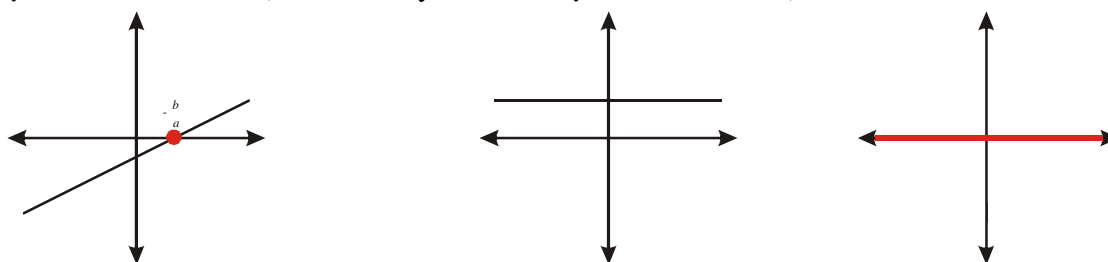
Nazývají se ekvivalentní úpravy a jsou to:

- přičítání a odečítání reálného čísla
- násobení reálným číslem kromě nuly
- dělení reálným číslem kromě nuly

Umocněním neztratím žádné správné řešení, ale mohou se objevit klamná další řešení. Proto typicky provádím zkoušku.

2.4 -

Možnosti řešení lineární rovnice $ax + b = 0$ poznám z hledání průsečíků lineární funkce $y = ax + b$ s osou x (osa $x =$ body s nulovou y -vou souřadnicí).



2.5 -

Obecný postup řešení lineární rovnice:

1. roznásobím všechny závorky
2. na jednu stranu dám výrazy s x , na druhou dám zbytek
3. vytknu x před závorku a závorkou vydělím

2.6 -

$3x - 1 > \frac{2x + 6}{2}$ - nerovnost dvou výrazů, úvahy podobné jako u rovnic.

Při řešení nerovnic můžeme používat následující úpravy:

1) ekvivalentní jednoduché

- přičítání (odčítání) reálných čísel, přičítání (odčítání) výrazů s neznámou
- násobení a dělení kladnými čísly

2) ekvivalentní s obrácením znaménka

- násobení a dělení zápornými čísly

3) ekvivalentní složité

- násobení a dělení výrazem s neznámou (musíme zjistit jestli je výraz kladný nebo záporný a pokud může být obojí, musíme výpočet rozdělit)

2.7 -

Rozdělení výpočtu

Když se operace nechová u všech čísel, která chci prověřit stejně (násobení výrazem s neznámou, absolutní hodnota apod.), rozdělím výpočet na více cest. Na konci každé cesty kontroluju jestli výsledek patří do skupiny čísel, se kterou jsem počítal.

$$\frac{3x}{2x+1} \leq 1$$

Potřebuji vynásobit nerovnici výrazem $(2x+1)$, může být kladný i záporný, musím rozdělit řešení do dvou větví

$$2x+1 < 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{2}$$

$$2x+1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

$$\frac{3x}{2x+1} \leq 1 \quad / \cdot (2x+1)$$

$$\frac{3x}{2x+1} \leq 1 \quad / \cdot (2x+1)$$

(násobím záporným číslem \Rightarrow obrátím nerovnost)

(násobím kladným číslem \Rightarrow nebudu obracet nerovnost)

$$3x \geq 2x+1$$

$$3x \leq 2x+1$$

$x \geq 1$ nerovnost platí pro $x \in \langle 1; \infty \rangle$, ale počítám pouze s $x < -\frac{1}{2}$

$x \leq 1$ - nerovnost platí pro $x \in (-\infty; 1]$, ale počítám pouze s $x > -\frac{1}{2}$

$$\text{pouze s } x < -\frac{1}{2}$$

$$\text{počítám pouze s } x > -\frac{1}{2}$$

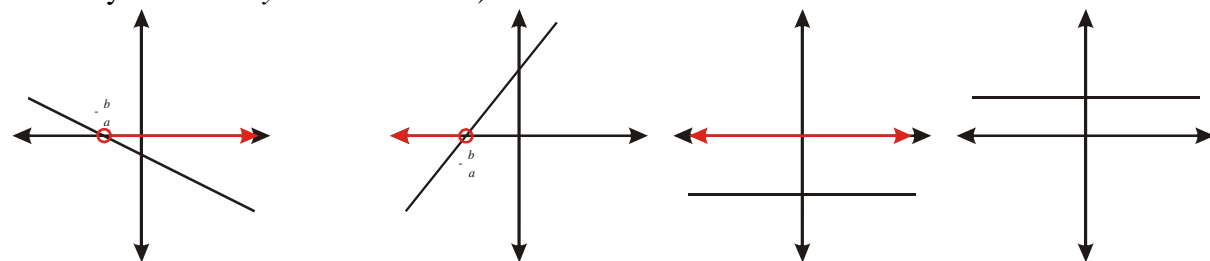
$$K_1 = \emptyset$$

$$K_2 = \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$$

$$K = K_1 \cup K_2 = \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$$

2.8 -

Možnosti řešení lineární nerovnice $ax+b < 0$ zjistím, pomocí grafu lineární funkce $y = ax+b$. Řešením jsou ta x , pro něž je hodnota y menší než nula a graf leží pod osou x (osa $x =$ body s nulovou y -vou souřadnicí).



2.9 -

Součinný tvar

Řešením rovnice v součinném tvaru (s nulou na pravé straně), jsou všechna čísla pro která, se libovolná ze závorek v součinu rovná nule.

Pravidlo je možné použít pouze když je jedna strana rovnice rovna nule.

$$(x+1)(x-3)(x+\pi) = 0$$

$$(x+1) = 0$$

$$(x-3) = 0$$

$$(x+\pi) = 0$$

$$K = \{-1, 3, -\pi\}$$

$$x = -1$$

$$x = 3$$

$$x = -\pi$$

2.10 -

Nerovnice v součinném tvaru

Vyřeš nerovnici $(x+2)(2x-1) \geq 0$

Vlevo součin 2 čísel, vpravo nula \Rightarrow jde pouze o znaménko obou závorek

| | | | |
|---------------|-----------------|--------------------------------|------------------------------------|
| | $(-\infty; -2)$ | $\left(-2; \frac{1}{2}\right)$ | $\left(\frac{1}{2}; \infty\right)$ |
| $(x+2)$ | - | + | + |
| $(2x-1)$ | - | - | + |
| $(x+2)(2x-1)$ | + | - | + |

Řešením jsou červené intervaly: $K = (-\infty; -2) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$ (Hraniční body jsou součástí řešení, protože v nerovnosti je \geq .)

2.11 -

Soustavy rovnic

Neznámé = možnosti volit čísla

Rovnice = podmínky omezující volbu čísel

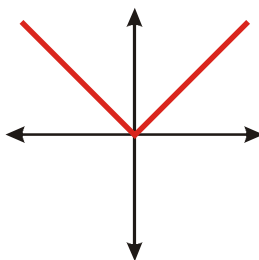
Soustavu rovnic zjednoduším, aby byly podmínky přehledné („vyrábění nul“)

Podle počtu neznámých a podmínek najdu řešení (podmínky jsou proti sobě \Rightarrow žádné řešení).

2.12 -

Absolutní hodnota

$$\begin{aligned} |x| \quad x \geq 0 &\Rightarrow |x| = x \\ x < 0 &\Rightarrow |x| = -x \end{aligned} \Rightarrow$$

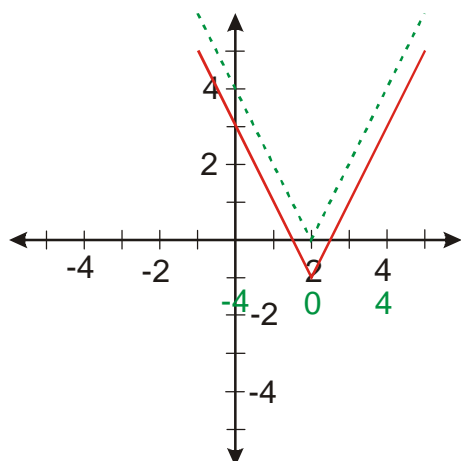


2.13 -

Kreslení grafů

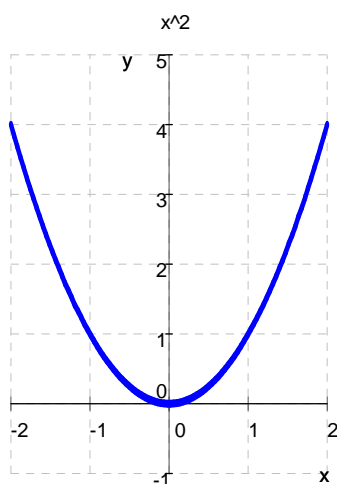
$$y = |x| = f(x)$$

$y = |2x-4|-1 = f(2x-4)-1$ čísla uvnitř závorky mění osu do které nakreslíme absolutní hodnotu, čísla vně závorky deformují nakreslený graf



2.14 -

Kvadratická funkce

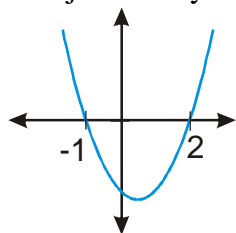


2.15 -

Kvadratická nerovnice $x^2 - x - 2 \leq 0$

dvě možnosti:

1. převedení na součinnový tvar a tabulka $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) \leq 0$ a rámeček 2.10
2. najdu kořeny a nakreslím graf



$$\Rightarrow K = \langle -1, 2 \rangle$$

2.16 -

Doplnění na čtverec

Vždy si mohou kvadratický trojčlen napsat jako druhou mocninu:

$$y = x^2 + 4x + 3 = x^2 + 2x \cdot 2 + \overbrace{2^2}^0 - 2^2 + 3 = [x^2 + 2x \cdot 2 + 2^2] - 2^2 + 3 = (x + 2)^2 - 1$$
$$A^2 + 2AB + B^2 \qquad = A^2 + 2AB + B^2 \qquad = (A + B)^2$$

2.17 -

Odmocnina

$$\sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}} \Rightarrow \sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}}$$

2.18 -

Rovnice s odmocninou

Pokud při řešení rovnice s odmocninou umocňuji, umocňuji rovnost dvou čísel (každá ze stran je číslo) a musím tedy umocnit obě tato čísla nejenom jejich část.

$$a + \sqrt{a^2 + 1} = 2 \quad \text{-teď to nejde, odmocniny by zůstaly}$$
$$\sqrt{a^2 + 1} = 2 - a \quad /^2$$
$$(\sqrt{a^2 + 1})^2 = (2 - a)^2$$
$$a^2 + 1 = 4 - 4a + a^2$$