2 - FUNKCE A ROVNICE

Následující základní znalosti je nezbytně nutné umět od okamžiku probrání až do konce studia matematiky na gymnáziu. Vyžadováno bude porozumění a schopnost aplikovat ne pouze mechanicky zopakovat.
Některé body neodpovídají přesně červeným rámečkům v textu poznámek, protože jde například o spojení nebo generalizaci několika míst, nic to však nemění na platnosti předchozího odstavce.

2.1 -

Funkce je předpis, který nám říká, jak něčemu přiřadit reálné číslo (nakreslit šipku od něčeho k reálnému číslu). Aby bylo přiřazování jednoznačné, musí od čekohokoliv vést pouze jedna šipka.

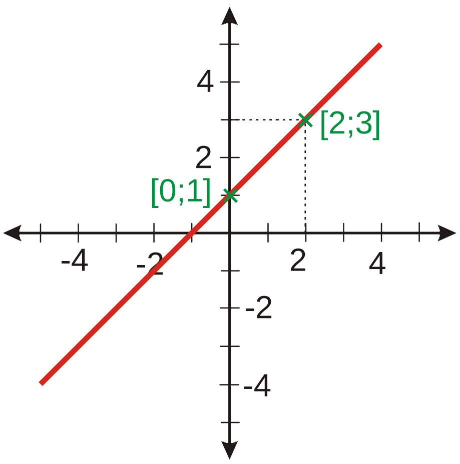
2.2 -

Lineární funkce je každá funkce, která jde zapsat ve tvaru $y = ax + b$, kde $a, b \in R$. Grafem lineární funkce je přímka (část přímky).
Konstanta *a* určuje u grafu funkce směr, konstanta *b* posunutí ve svislém směru.
Graf nakreslím pomocí dvou bodů ze dvojího dosazení za *x*:

$y = x + 1$

$x = 0 \Rightarrow y = x + 1 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow \text{bod}[0;1]$

$x = 2 \Rightarrow y = x + 1 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow \text{bod}[2;3]$



2.3 -

$3x - 1 = \frac{2x + 6}{2}$ - rovnost dvou výrazů, za x můžeme dosazovat různá čísla, tím měníme hodnoty obou výrazů, hledáme takové *x*, aby rovnost platila,
z této rovnice není vidět správné *x*, upravíme rovnost, tak aby dál platila a *x* bylo lépe vidět
Úpravy, které můžu dělat:

- **musí z rovnajících se čísel vyrobit rovnající se čísla**
- **nesmí z nerovnajících čísel vyrobit rovnající se čísla**

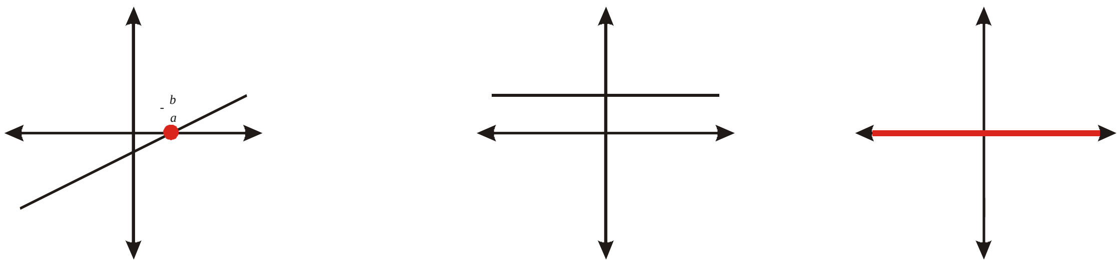
Nazývají se ekvivalentní úpravy a jsou to:

- **přičítání a odečítání reálného čísla**
- **násobení reálným číslem kromě nuly**
- **dělení reálným číslem kromě nuly**

Umocněním neztratím žádné správné řešení, ale mohou se objevit klamná další řešení. Proto typicky provádím zkoušku.

2.4 -

Možnosti řešení lineární rovnice $ax+b=0$ poznám z hledání průsečíků lineární funkce $y=ax+b$ s osou x (osa x = body s nulovou y-vou souřadnicí).



2.5 -

Obecný postup řešení lineární rovnice:

1. roznásobím všechny závorky
2. na jednu stranu dám výrazy s x, na druhou dám zbytek
3. vytknu x před závorku a závorkou vydělím

2.6 -

$3x - 1 > \frac{2x+6}{2}$ - nerovnost dvou výrazů, úvahy podobné jako u rovnic.

Při řešení nerovnic můžeme používat následující úpravy:

1) <u>ekvivalentní jednoduché</u>

- přičítání (odčítání) reálných čísel,
  přičítání (odčítání) výrazů s neznámou
- násobení a dělení kladnými čísly

2)<u>ekvivalentní s obrácením znaménka</u>

- násobení a dělení zápornými čísly

3)<u>ekvivalentní složité</u>

- násobení a dělení výrazem s neznámou (musíme zjistit jestli je výraz kladný nebo záporný a pokud může být obojí, musíme výpočet rozdělit)

2.7 -

Rozdělení výpočtu

Když se operace nechová u všech čísel, která chci prověřit stejně (násobení výrazem s neznámou, absolutní hodnota apod.), rozdělím výpočet na více cest. Na koncí každé cesty kontroluju jestli výsledek patří do skupiny čísel, se kterou jsem počítal.

$$\frac{3x}{2x+1} \le 1$$

Potřebuji vynásobit nerovnici výrazem $(2x+1)$, může být kladný i záporný, musím rozdělit řešení do dvou větví

$$2x+1<0 \Rightarrow x<-\frac{1}{2}$$

$$\frac{3x}{2x+1} \le 1 \qquad /\cdot(2x+1)$$

(násobím záporným číslem $\Rightarrow$ obrátím nerovnost)

$$3x \ge 2x+1$$

$x \ge 1$ nerovnost platí pro $x \in \langle 1;\infty)$, ale počítám pouze s $x<-\frac{1}{2}$

$$K_1 = \emptyset$$

$$2x+1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{2}$$

$$\frac{3x}{2x+1} \le 1 \qquad /\cdot(2x+1)$$

(násobím kladným číslem $\Rightarrow$ nebudu obracet nerovnost)

$$3x \le 2x+1$$

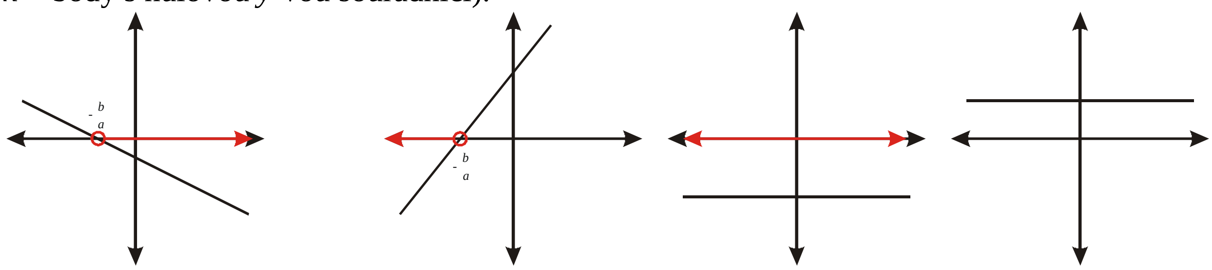
$x \le 1$- nerovnost platí pro $x \in (-\infty;1\rangle$, ale počítám pouze s $x>-\frac{1}{2}$

$$K_2 = \left(-\frac{1}{2};1\right\rangle$$

$$K = K_1 \cup K_2 = \left(-\frac{1}{2};1\right\rangle$$

2.8 -

Možnosti řešení lineární nerovnice $ax+b<0$ zjistím, pomocí grafu lineární funkce $y=ax+b$. Řešením jsou ta *x*, pro něž je hodnota *y* menší než nula a graf leží pod osou *x* (osa *x* = body s nulovou *y*-vou souřadnicí).



2.9 -

Součinový tvar

Řešením rovnice v součinovém tvaru (s nulou na pravé straně), jsou všechna čísla pro která, se libovolná ze závorek v součinu rovná nule.

Pravidlo je možné použít pouze když je jedna strana rovnice rovna nule.

$$(x+1)(x-3)(x+\pi)=0$$

$$(x+1)=0 \qquad (x-3)=0 \qquad (x+\pi)=0$$

$$x=-1 \qquad x=3 \qquad x=-\pi$$

$$K=\{-1,3,-\pi\}$$

2.10 -

Nerovnice v součinovém tvaru

Vyřeš nerovnici $(x+2)(2x-1) \geq 0$

Vlevo součin 2 čísel, vpravo nula $\Rightarrow$ jde pouze o znaménko obou závorek

	$(-\infty;-2)$	$\left(-2;\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};\infty\right)$
$(x+2)$	-	+	+
$(2x-1)$	-	-	+
$(x+2)(2x-1)$	+	-	+

Řešením jsou červené intervaly: $K=(-\infty;-2\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2};\infty\right)$ (Hraniční body jsou součástí řešení, protože v nerovnosti je $\geq$.)

2.11 -

Soustavy rovnic

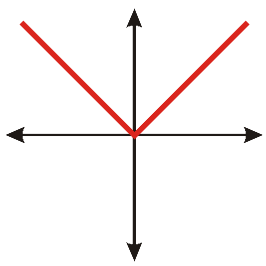
Neznámé = možnosti volit čísla
Rovnice = podmínky omezující volbu čísel
Soustavu rovnic zjednoduším, aby byly podmínky přehledné („vyrábění nul“)
Podle počtu neznámých a podmínek najdu řešení (podmínky jsoucí proti sobě $\Rightarrow$ žádné řešení).

2.12 -

Absolutní hodnota

$|x|$ $\quad$ $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$

$x < 0 \Rightarrow |x| = -x$ $\quad \Rightarrow$

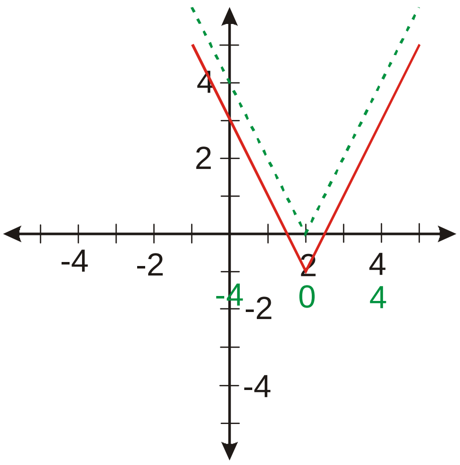


2.13 -

Kreslení grafů

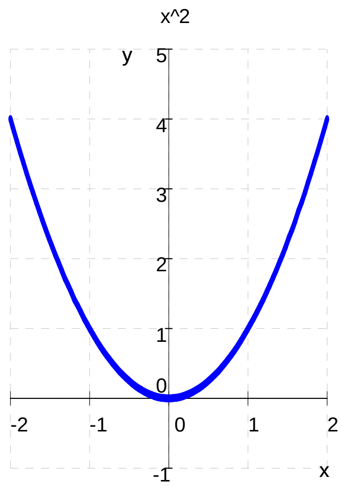
$y=|x|=f(x)$

$y=|2x-4|-1=f(2x-4)-1$ čísla uvnitř závorky mění osu do které nakreslíme absolutní hodnotu, čísla vně závorky deformují nakreslený graf



2.14 -

Kvadratická funkce



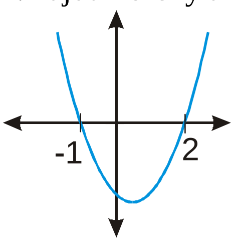
2.15 -

Kvadratická nerovnice $x^2 - x - 2 \le 0$

dvě možnosti:

1. převedení na součinový tvar a tabulka $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) \le 0$ a rámeček 2.10

2. najdu kořeny a nakreslím graf



$\Rightarrow \; K = \langle -1, 2 \rangle$

2.16 -

Doplnění na čtverec

Vždy si mohu kvadratický trojčlen napsat jako druhou mocninu:

$$y=x^2+4x+3=\overbrace{x^2+2x\cdot 2}^{x^2-6x}+\overbrace{2^2-2^2}^{0}+3=\left[x^2+2x\cdot 2+2^2\right]-2^2+3=(x+2)^2-1$$

$$A^2+2AB+B^2 \qquad = \ A^2+2AB+B^2 \qquad =(A+B)^2$$

2.17 -

Odmocnina

$$\sqrt[k]{x}=x^{\frac{1}{k}} \Rightarrow \sqrt{3^3}=3^{\frac{3}{2}}$$

2.18 -

Rovnice s odmocninou

Pokud při řešení rovnice s odmocninou umocňuji, umocňuji rovnost dvou čísel (každá ze stran je číslo) a musím tedy umocni obě tato čísla ne jenom jejich část.

$a+\sqrt{a^2+1}=2$ -teď to nejde, odmocniny by zůstaly

$\sqrt{a^2+1}=2-a \quad /^2$

$\left(\sqrt{a^2+1}\right)^2=(2-a)^2$

$a^2+1=4-4a+a^2$