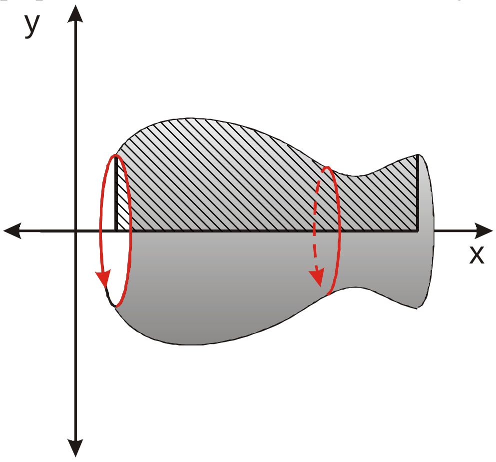
10.3.15 Výpočet objemu rotačních těles

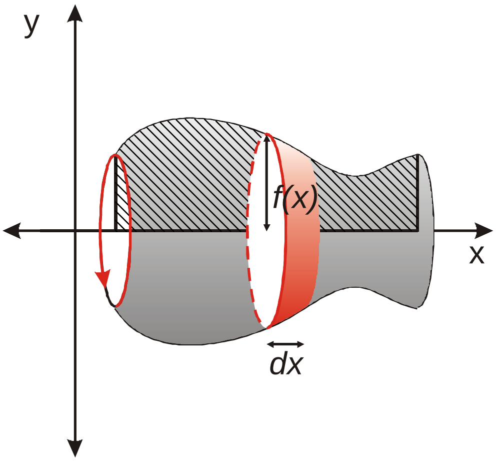
Předpoklady: 10313

Vzorec pro objem rotačního tělesa si odvodíme způsobem, který sice není nenapadnutelný, ale na druhé straně poměrně přesně odpovídá tomu, co se provozuje v technické praxi.

rotační těleso vznikne rotací rovinného útvaru (na obrázku šrafovaně) kolem osy (v našem případě osa *x*, na které zároveň leží jedna ze stran útvaru).



Při výpočtech povrchů jsme využívali fakt, že integrování umožňuje sečíst nekonečně mnoho nekonečně tenkých obdélníčků.
Analogicky můžeme nakrájet na nekonečně tenké plátky (jako salám) naše rotační těleso.



Sečtením těchto plátků integrací získáme celý objem $V(T)=\int_a^b dV$.

Jaký je objem jednoho kolečka?
Jde o válec (pokud je *dx* nekonečně malé, funkce nestihne změnit svou hodnotu) , kde $r=f(x)$, $v=dx \Rightarrow$

objem válce $V=\pi r^2 v \Rightarrow dV=\pi f^2(x)dx$

$$V(T)=\int_a^b dV=\int_a^b \pi f^2(x)dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Př. 1: Vypočti objem tělesa, které vznikne rotací útvaru $y = 2$, $x = 0$, $x = 4$ kolem osy *x*. Jaký druh tělesa takto vznikne? Porovnej výsledek vypočtený integrálem s výsledkem vypočteným pomocí vzorce pro objem tohoto tělesa.

Dosadíme do vzorce pro objem rotačního tělesa:

$$V(T) = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx = \pi\int_0^4 2^2\,dx = \pi\int_0^4 4dx = \pi\left[4x\right]_0^4 = \pi(4\cdot 4-0) = 16\pi$$

Tělesem, které vznikne rotací obdélníku kolem osy *x* je válec s těmito parametry: $r = 2$, $v = 4$

Objem válce: $V = \pi r^2 v = \pi\cdot 2^2\cdot 4 = 16\pi$

Př. 2: Vypočti objem tělesa, které vznikne rotací útvaru $y = 3-0,5x$, $x = 0$, $x = 4$ kolem osy *x*. Jaký druh tělesa takto vznikne? Porovnej výsledek vypočtený integrálem s výsledkem vypočteným pomocí vzorce pro objem tohoto tělesa.

Dosadíme do vzorce pro objem rotačního tělesa:

$$V(T) = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx = \pi\int_0^4\left(3-\frac{1}{2}x\right)^2 dx = \pi\int_0^4\left(9-3x+\frac{1}{4}x^2\right)dx = \pi\left[9x-\frac{3}{2}x^2+\frac{x^3}{3\cdot 4}\right]_0^4 =$$

$$= \pi\left[\left(9\cdot 4-\frac{3}{2}4^2+\frac{4^3}{3\cdot 4}\right)-\left(9\cdot 0-\frac{3}{2}\cdot 0^2+\frac{0^3}{3\cdot 4}\right)\right] = \pi\left(36-24+\frac{16}{3}\right) = \frac{52\pi}{3}$$

Tělesem, které vznikne rotací pravoúhlého lichoběžníku kolem osy *x* je komolý rotační kužel s těmito parametry: $r_1 = 3$, $r_2 = 3-0,5\cdot 4 = 1$, $v = 4$

Objem komolého rotačního kužele:

$$V = \frac{\pi v}{3}\left(r_1^2+r_1r_2+r_2^2\right) = \frac{\pi\cdot 4}{3}\left(3^2+3\cdot 1+1^2\right) = \frac{\pi\cdot 4\cdot 13}{3} = \frac{52\pi}{3}$$

Př. 3: Odvoď vzorec pro objem koule o poloměru *r*.

Nejdříve musíme najít funkci, která bude ohraničovat útvar jehož rotací vznikne koule:

Rovnice kružnice o poloměru *r* se středem v počátku: $x^2 + y^2 = r^2$

Vyjádříme *y* (předpis funkce): $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Integrujeme v mezích od 0 do *r*:

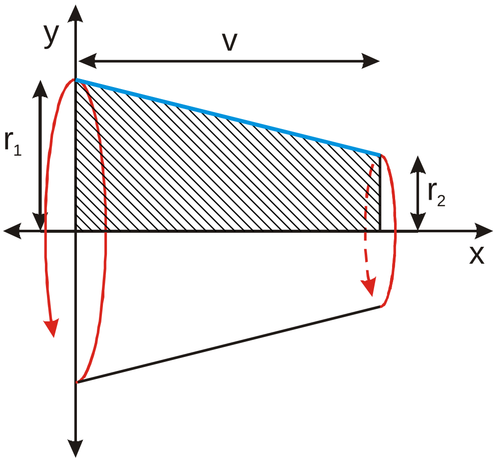
$$V(T) = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx = \pi\int_0^r\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx = \pi\int_0^r\left(r^2-x^2\right)dx = \pi\left[xr^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^r = \pi\left(r\cdot r^2-\frac{r^3}{3}\right)$$

$$= \pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$\Rightarrow$ objem celé koule je dvojnásobný $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Př. 4: Odvoď vzorec pro objem komolého rotačního kužele s poloměry podstav r_1, r_2 a výškou *v*.

Nakreslíme si obrázek:



Komolý rotační kužel vznikne rotací pravoúhlého lichoběžníku:
Nejdříve musíme najít funkční předpis modře vyznačené strany lichoběžníka.
Jde lineární funkci $y = ax + b$, která prochází body $[0; r_1]$ a $[v; r_2]$.

Bod $[0; r_1] \Rightarrow b = r_1$

Koeficient a určíme například pomocí vztahu $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{r_2 - r_1}{v - 0} = \frac{r_2 - r_1}{v}$

Hledaná funkce, kterou budeme integrovat: $y = \frac{r_2 - r_1}{v} x + r_1$.

Dosadíme do vzorce pro výpočet objemu:

$$V(T) = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_0^v \left[\frac{r_2 - r_1}{v} x + r_1 \right]^2 dx =$$

$$= \pi \left(\frac{r_2 - r_1}{v} \right)^2 \int_0^v x^2\,dx + \pi \frac{2r_1(r_2 - r_1)}{v} \int_0^v x\,dx + \pi r_1^2 \int_0^v 1dx =$$

$$= \pi \left(\frac{r_2 - r_1}{v} \right)^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^v + \pi \frac{2r_1(r_2 - r_1)}{v} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^v + \pi r_1^2 [x]_0^2 = \pi \frac{r_2^2 - 2r_1r_2 + r_1^2}{v^2} \frac{v^3}{3} + \pi \frac{2r_1r_2 - 2r_1^2}{v} \frac{v^2}{2} + \pi r_1^2 v =$$

$$= \pi v \left(\frac{r_2^2 - 2r_1r_2 + r_1^2}{3} + \frac{2r_1r_2 - 2r_1^2}{2} + r_1^2 \right) = \pi v \left(\frac{2r_2^2 - 4r_1r_2 + 2r_1^2 + 6r_1r_2 - 6r_1^2 + 6r_1^2}{6} \right) =$$

$$= \pi v \left(\frac{2r_1^2 + 2r_1r_2 + 2r_2^2}{6} \right) = \frac{\pi v}{3} \left(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2 \right)$$

Objem komolého rotačního kužele je dán vzorcem $V = \frac{\pi v}{3} \left(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2 \right)$

Př. 5: Petáková:
strana 16/cvičení 128 b) d) h) l)
strana 16/cvičení 130 b) h)
strana 16/cvičení 132
strana 16/cvičení 135 a)

Shrnutí: