10.3.12 Výpočet určitých integrálů II

Předpoklady: 10311

Př. 1: Vypočti:

a) $\int_0^{2\pi} \cos x \, dx$ b) $\int_{-1}^{2} \left(2x^2 - x + \sqrt{x+2}\right) dx$ c) $\int_1^2 \frac{3x^2}{x^3+1} dx$

a) $\int_0^{2\pi} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{2\pi} = (\sin 2\pi - \sin 0) = 0 - 0 = 0$

b)

$$\int_{-1}^{2} \left(2x^2 - x + \sqrt{x+2}\right) dx = 2\int_{-1}^{2} x^2 \, dx - \int_{-1}^{2} x \, dx + \int_{-1}^{2} \sqrt{x+2} \, dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} + \left[\frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{2} =$$

$$= 2\left[\frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right]_{-1}^{2} - \left[\frac{2^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right]_{-1}^{2} + \frac{2}{3}\left[(2+2)^{\frac{3}{2}} - (-1+2)^{\frac{3}{2}}\right] = 2 \cdot 3 - \frac{3}{2} + \frac{2}{3}(8-1) = \frac{55}{6}$$

c) $\int_1^2 \frac{3x^2}{x^3+1} dx \Rightarrow$ integrujeme substitucí:

$$\int \frac{3x^2}{x^3+1} = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln\left|x^3+1\right| + C$$

$t = x^3 + 1 \Rightarrow dt = 3x^2$

dopočteme integrál: $\int_1^2 \frac{3x^2}{x^3+1} dx = \left[\ln\left|x^3+1\right|\right]_1^2 = \ln\left|2^3+1\right| - \ln\left|1^3+1\right| = \ln 9 - \ln 2$

Vrátíme se ještě k integrálu v posledním bodě předchozího příkladu:

$\int_1^2 \frac{3x^2}{x^3+1} dx \Rightarrow$ integrujeme substitucí:

$$\int \frac{3x^2}{x^3+1} = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C$$

$t = x^3 + 1 \Rightarrow dt = 3x^2$

výsledkem určitého integrálu je číslo $\Rightarrow$ nemohli bychom získat výsledek bez zpětného dosazování původní proměnné do integrálu?

mělo by to jít, ale místo mezí pro x musíme dosazovat meze pro t:

$t = x^3 + 1 \Rightarrow g(a) = 1^3 + 1 = 2$, $g(b) = 2^3 + 1 = 9$

$$\int_1^2 \frac{3x^2}{x^3+1} dx = \int_2^9 \frac{1}{t} dt = \left[\ln|t|\right]_2^9 = \ln 9 - \ln 2$$

$t = x^3 + 1 \Rightarrow dt = 3x^2$ $\Rightarrow$ stejný výsledek jako při zpětném dosazení.

$g(a) = 1^3 + 1 = 2, g(b) = 2^3 + 1 = 9$

Věta o substituci určitého integrálu:

Jsou-li funkce $t=g(x)$ a její derivace $g'(x)$ spojité v uzavřeném intervalu $\langle a;b\rangle$ a je-li zároveň spojitá i funkce $f(t)$ pro všechna $t=g(x)$, kde $x\in\langle a;b\rangle$, pak platí

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Př. 2: Vypočti:

a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cdot\cos x\,dx$ b) $\int_{-2}^{2}\sqrt{10+3x}\,dx$ c) $\int_{-1}^{2}\frac{3x}{x^2-1}\,dx$

a)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cdot\cos x\,dx=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{4}\right)=\frac{1}{8}$$

$t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x\,dx$

$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

b)

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{10+3x}\,dx=\frac{1}{3}\int_{-2}^{2}\sqrt{10+3x}\,3\,dx=\frac{1}{3}\int_4^{16}\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{3}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_4^{16}=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_4^{16}=$$

$t=10+3x\Rightarrow dt=3\,dx$

$g(-2)=10+3\cdot(-2)=4,\ g(2)=10+3\cdot 2=16$

$$=\frac{2}{9}\left(16\sqrt{16}-4\sqrt{4}\right)=\frac{2}{9}\cdot 56=\frac{112}{9}$$

c)

$$\int_{-1}^{2}\frac{3x}{x^2+1}\,dx=\frac{3}{2}\int_{-1}^{2}\frac{2x}{x^2+1}\,dx=\frac{3}{2}\int_2^5\frac{1}{t}\,dt=\frac{3}{2}\left[\ln t\right]_2^5=\frac{3}{2}(\ln 5-\ln 2)$$

$t=x^2+1\Rightarrow dt=2x\,dx$

$g(-1)=(-1)^2+1=2,\ g(2)=2^2+1=5$

Při výpočtu určitých integrálů můžeme podobně využívat během výpočtu i větu o integraci per partes:
Jsou-li $u=u(x)$ a $v=v(x)$ funkce mající v intervalu $\langle a;b\rangle$ spojité derivace, pak platí:

$$\int_a^b u\cdot v'\,dx=\left[uv\right]_a^b-\int_a^b u'\cdot v\,dx$$

Př. 3: Vypočti $\int_1^2 \ln x\cdot x\,dx$.

$$\int_1^2 \ln x\cdot x\,dx$$

$$\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$$

$$\int_1^2 \ln x \cdot x \, dx = \left[\ln x \cdot \frac{x^2}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = \left(\ln 2 \cdot \frac{2^2}{2} - \ln 1 \cdot \frac{1^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx =$$

$u = \ln x, u' = \dfrac{1}{x}$

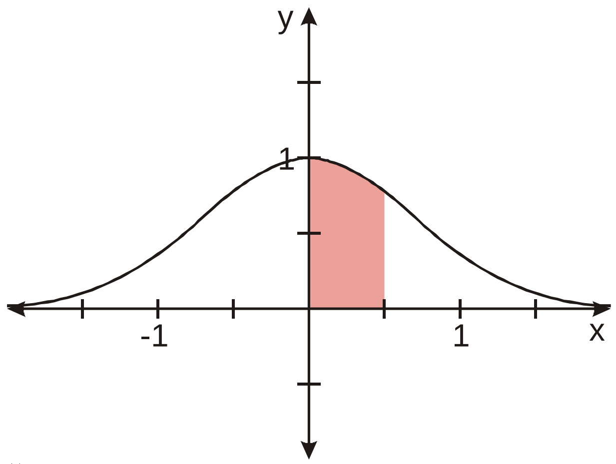
$v' = x, v = \dfrac{x^2}{2}$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{1}{4}(4-1) = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

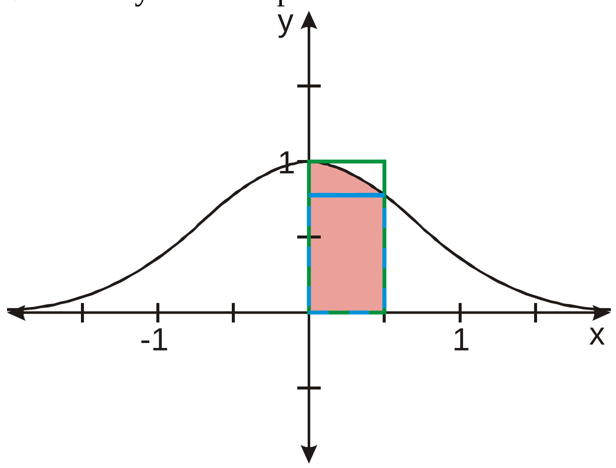
Poznámka: Zbytek hodiny je spíše jen poznámkou pro zájemce.

Existují integrály, které není možné na naší úrovni spočítat. Například jeden z nejznámějších $\int e^{-x^2} dx$. Jde o jeden z nejdůležitějších integrálů vůbec. Funkce e^{-x^2} je základem normálního Gassova rozdělení, které popisuje rozdělení hodnot náhodné spojité veličiny (například výšky nebo hmotnosti u lidí).

Jak určíme integrál $\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx$ alespoň přibližně?



Červeně vybarvenou plochu můžeme odhadnout pomocí modrého a zeleného obdélníku:



- výška zeleného obdélníku odpovídá MAXIMU ***M*** funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a;b \rangle$

- výška modrého obdélníku odpovídá minimu funkce ***m*** $f(x)$ v intervalu $\langle a;b\rangle$

$\Rightarrow$ platí: $m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$

Konkrétně:

Nejdříve musíme najít maximum a minimum funkce $y=e^{-x^2}$:

$\left(e^{-x^2}\right)'=e^{-x^2}\cdot(-2x)$ $\Rightarrow$ pro $x\in\langle 0;\infty)$ je funkce $y=e^{-x^2}$ klesající $\Rightarrow$

- maximum je v bodě $x=0$, $y=e^{-0^2}=e^0=1$
- minimum je v bodě $x=0,5$, $y=e^{-0,5^2}=e^{-0,25}=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}(0,5-0)\le\int_0^{0,5}e^{-x^2}\,dx\le 1(0,5-0)$

$\frac{0,5}{\sqrt[4]{e}}\le\int_0^{0,5}e^{-x^2}\,dx\le 0,5$

Př. 4: Petáková:
strana 165/cvičení 92 h) i)
strana 165/cvičení 99

Shrnutí: Výpočty určitého integrálu můžeme provádět analogicky s výpočty neurčitých integrálů.