

### 10.3.11 Výpočet určitých integrálů I

**Předpoklady:** 10310

Výsledek minulé hodiny:

$$\text{Určitý integrál: } \int_1^3 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

$\Rightarrow$  obsah plochy pod částí paraboly od 1 do 3 je  $\frac{26}{3}$ .

nejde o nic jiného než určení neurčitého integrálu a dosazení do něj  $\Rightarrow$  můžeme postupovat tak, že spočítáme neurčitý integrál a dosadíme do něj

**Př. 1:** Vypočti:

a)  $\int_0^\pi \sin x dx$

b)  $\int_1^2 (3x^2 + 2x + 1) dx$

c)  $\int_1^2 \left( 2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$

a)  $\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2$

b)  $\int_1^2 (3x^2 + 2x + 1) dx = \left[ 3 \frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 = [x^3 + x^2 + x]_1^2 = (2^3 + 2^2 + 2) - (1^3 + 1^2 + 1) = 11$

c)  $\int_1^2 \left( 2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int_1^2 \left( 2 + x^{\frac{1}{2}} + x^{-2} \right) dx = \left[ 2x + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^2 = \left[ 2x + \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{1}{x} \right]_1^2 =$   
 $= \left( 2 \cdot 2 + \frac{2}{3} \sqrt{2^3} - \frac{1}{2} \right) - \left( 2 \cdot 1 + \frac{2}{3} \sqrt{1^3} - \frac{1}{1} \right) = 4 + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} - 2 - \frac{2}{3} + 1 = \frac{11}{6} + \frac{4\sqrt{2}}{3}$

Existují věty, které v některých případech umožňují zpřehlednit (někdy i zjednodušit) výpočet určitých integrálů:

**Nechť  $f_1, f_2$  jsou v intervalu  $I$  spojité funkce,  $a, b$  necht' jsou libovolné body z  $I$  a  $c_1, c_2$**

**libovolné konstanty. Potom platí:**  $\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx$ .

$\Rightarrow$  stejně jako u výpočtu neurčitých integrálů můžeme integrály trhat podle sčítání a vytýkat před integritka konstanty a takto zjednodušené integrály počítat zvlášť.

**Př. 2:** Vypočti:

a)  $\int_0^2 (3x^2 + 4x - 1) dx$

b)  $\int_{-1}^1 (4x^3 - 2x + \sqrt{2}) dx$

c)  $\int_1^2 \left( 2\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^3} \right) dx$

a)

$$\int_0^2 (3x^2 + 4x - 1) dx = 3 \int_0^2 x^2 dx + 4 \int_0^2 x dx - \int_0^2 1 dx = 3 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^2 + 4 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^2 - [x]_0^2 =$$

$$= 3 \left( \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) + 4 \left( \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) - (2 - 0) = 3 \cdot \frac{8}{3} + 4 \cdot \frac{4}{2} - 2 = 14$$

b)

$$\int_{-1}^1 (4x^3 - 2x + \sqrt{2}) dx = 4 \int_{-1}^1 x^3 dx - 2 \int_{-1}^1 x dx + \sqrt{2} \int_{-1}^1 1 dx = 4 \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 - 2 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 + \sqrt{2} [x]_{-1}^1 =$$

$$= 4 \left[ \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} \right] - 2 \left[ \frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} \right] + \sqrt{2} [1 - (-1)] = 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + \sqrt{2} \cdot 2 = 2\sqrt{2}$$

c)

$$\int_1^2 \left( 2\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^3} \right) dx = 2 \int_1^2 \sqrt[3]{x^2} dx - 3 \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx = 2 \int_1^2 x^{\frac{2}{3}} dx - 3 \int_1^2 x^{-3} dx =$$

$$= 2 \left[ \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \right]_1^2 - 3 \left[ \frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^2 = 2 \left[ \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} \right]_1^2 - 3 \left[ -\frac{1}{2x^2} \right]_1^2 = \frac{6}{5} (\sqrt[3]{2^5} - \sqrt[3]{1^3}) + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^1} \right) =$$

$$= \frac{6}{5} (\sqrt[3]{32} - 1) + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{6}{5} \sqrt[3]{32} - \frac{6}{5} - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{5} \sqrt[3]{32} - \frac{6}{5} - \frac{9}{8} = \frac{6}{5} \sqrt[3]{32} - \frac{109}{40}$$

**Při výpočtu můžeme zaměnit meze integrálu:**  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

**Př. 3:** Ověř platnost předchozí věty na výpočtu integrálu  $\int_1^2 (3x^2 - e^x) dx$ .

$$\int_1^2 (3x^2 - e^x) dx = \left[ 3 \frac{x^3}{3} - e^x \right]_1^2 = [x^3 - e^x]_1^2 = (2^3 - e^2) - (1^3 - e^1) = 7 - e^2 + e$$

$$-\int_2^1 (3x^2 - e^x) dx = - \left[ 3 \frac{x^3}{3} - e^x \right]_2^1 = - [x^3 - e^x]_2^1 = - [(1^3 - e^1) - (2^3 - e^2)] = 7 - e^2 + e$$

Výpočet integrálu můžeme také rozdělit pomocí mezí:

**Věta o aditivnost určitého integrálu:**

Je-li funkce  $f$  spojitá v intervalu  $I$ , který obsahuje libovolně položené body  $a, b, c$  pak platí:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$\Rightarrow$  větu používáme, když není možné integrovat v celém intervalu najednou.

**Př. 4:** Vypočti  $\int_{-1}^2 |x| dx$ .

Nikde jsme si neříkali, jak integrovat absolutní hodnotu, ale už v prvním ročníku jsme se učili, jak ji můžeme nahradit pomocí lineárních funkcí:

- $x \in (-\infty; 0) \Rightarrow |x| = -x$
- $x \in \langle 0; \infty \rangle \Rightarrow |x| = x$

stejným způsobem můžeme rozdělit i výpočet integrálu:

$$\int_{-1}^2 |x| dx = \int_{-1}^0 |x| dx + \int_0^2 |x| dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^2 x dx = \left[ -\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^2 =$$

$$= -\left[ \frac{0^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} \right] + \left[ \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

**Př. 5:** Petáková:

strana 165/cvičení 92 d) f) j)

strana 165/cvičení 93

strana 165/cvičení 96

**Shrnutí:** Výpočty určitého integrálu můžeme provádět analogicky s výpočty neurčitých integrálů.