

10.3.3 Výpočet neurčitých integrálů II

Předpoklady: 10302

Integrační proměnná se do integrálu nepíše pro nic za nic. Funkce může obsahovat proměnných více a na tom, kterou zvolíme jako tu integrační (která se mění), závisí výsledek.

Například:

$$\int (a+x) dx = \int a dx + \int x dx = a \int 1 dx + \int x dx = ax + \frac{x^2}{2} + C$$

(při integrování podle dx hraje a stejnou roli jako třeba číslo 2, roli obyčejné konstanty)

$$\int (a+x) da = \int a da + \int x da = \int a da + x \int 1 da = \frac{a^2}{2} + xa + C$$

(při integrování podle da hraje x stejnou roli jako třeba číslo 2, roli obyčejné konstanty)

Př. 1: Vypočti:

a) $\int (at^2 + e^x) dx$

b) $\int (at^2 + e^x) dt$

c) $\int (at^2 + e^x) da$

a) $\int (at^2 + e^x) dx = \int at^2 dx + \int e^x dx = at^2 x + e^x + C$

b) $\int (at^2 + e^x) dt = \int at^2 dt + \int e^x dt = a \frac{t^3}{3} + te^x + C$

c) $\int (at^2 + e^x) da = \int at^2 da + \int e^x da = \frac{a^2}{2} t^2 + ae^x + C$

Pedagogická poznámka: U předchozí příkladu kontrolujeme výsledek po bodě a), zbývající body kontrolujeme najednou. Největší problémy v druhých dvou bodech studentům dělá integrace členu e^x .

Př. 2: Sestav tabulku pro integrování goniometrických funkcí.

$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$

Pedagogická poznámka: Je třeba se studenty prodiskutovat fakt, že tabulka nám nedává žádný návod jak integrovat funkce $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$, protože nemáme žádnou funkci, která by se zderivovala na $\operatorname{tg} x$.

Př. 3: Vypočti:

a) $\int \left(\cos x + 2 + \frac{1}{2 \sin^2 x} \right) dx$

b) $\int \left(a \sin x - \frac{2}{\sin^2 x} + \frac{\sin a}{\sqrt{x}} \right) dx$

a) $\int \left(\cos x + 2 + \frac{1}{2 \sin^2 x} \right) dx = \int \cos x dx + \int 2 dx + \int \frac{1}{2 \sin^2 x} dx = \sin x + 2x - \frac{\cotg x}{2} + C$

b)

$$\int \left(a \sin x - \frac{2}{\sin^2 x} + \frac{\sin a}{\sqrt{x}} \right) dx = \int a \sin x dx - \int \frac{2}{\sin^2 x} dx + \sin a \int x^{-\frac{1}{2}} dx =$$
$$= -a \cos x - (-2 \cotg x) + \sin a \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -a \cos x + 2 \cotg x + 2 \sin a \sqrt{x} + C$$

Př. 4: Vypočti:

a) $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin x} dx$

b) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$

c) $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$

a) $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin x} dx = \int \cos x dx = \sin x + C$

b) $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C$

výsledek vypadá dost neuvěřitelně \Rightarrow zkusíme si ho zderivovat:

$$(\operatorname{tg} x - x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$$

c) $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x} dx = \int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C$

Př. 5: Najdi k funkci $y = 3x^2 - 2x + 1$ primitivní funkci, jejíž graf prochází bodem $[1; 3]$.

Primitivních funkcí je nekonečně mnoho, liší se o konstantu \Rightarrow vypočteme neurčitý integrál a určíme hodnotu integrační konstanty:

$$\int (3x^2 - 2x + 1) dx = 3 \int x^2 dx - 2 \int x dx + \int dx = 3 \frac{x^3}{3} - 2 \frac{x^2}{2} + x + C = x^3 - x^2 + x + C$$

Funkce má procházet bodem $[1; 3]$: $3 = 1^3 - 1^2 + 1 + C \Rightarrow C = 2$

Primitivní funkcí s požadovanými vlastnosti je funkce $y = x^3 - x^2 + x + 2$

Př. 6: Najdi k funkci $y = \cos x - 2$ primitivní funkci, jejíž graf prochází bodem $\left[\frac{\pi}{2}; -1 \right]$.

Primitivních funkcí je nekonečně mnoho, liší se o konstantu \Rightarrow vypočteme neurčitý integrál a určíme hodnotu integrační konstanty:

$$\int (\cos x - 2) dx = \int \cos x dx - 2 \int dx = \sin x - 2x + C$$

Funkce má procházet bodem $\left[\frac{\pi}{2}; -1\right]$: $-1 = \sin \frac{\pi}{2} - 2 \frac{\pi}{2} + C$

$$-1 = 1 - \pi + C \Rightarrow C = \pi - 2$$

Primitivní funkcí s požadovanými vlastnosti je funkce $y = \sin x - 2x + \pi - 2$

Př. 7: Petáková:
strana 164/cvičení 86 a) c) f) h) i) k)

Shrnutí: Integrační proměnná nám říká, která z neznámých se mění a tím určuje jakým způsobem vypočteme integrál. Integrály ze stejných výrazů podle různých proměnných se mohou zcela lišit.