

10.2.11 Průběh funkce II (hledání extrémů)

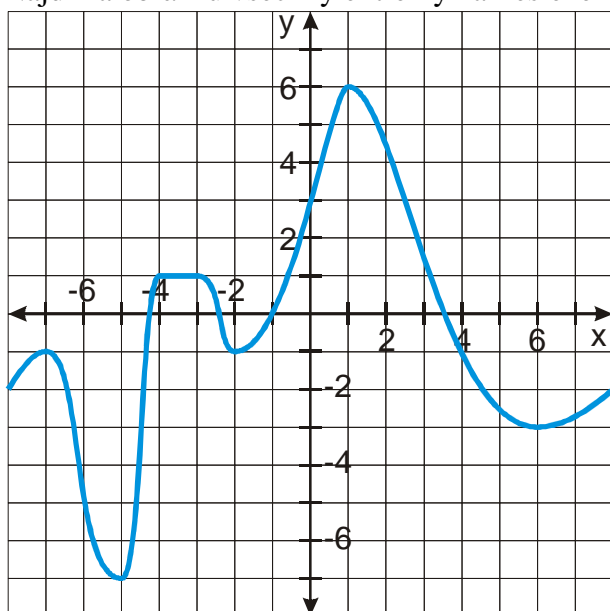
Předpoklady: 10210

Pedagogická poznámka: Poslední příklad v běžné vyučovací hodině nestíháme. Rychlost postupu je možné značně ovlivnit tím, kolik času dáte studentům na výzkumné příklady, nebo jestli je jako příklady úplně přeskočíte a rovnou jim ukážete řešení. Největším problémem v této hodině není v žádném případě derivování, ale řešení rovnic a nerovnic (už je to příliš dávno, kdy jsme je probírali).

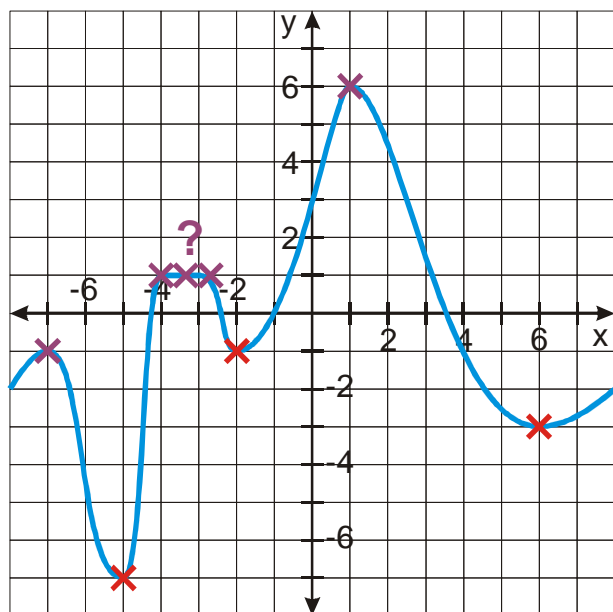
Extrém = výjimečná hodnota

- maximum = největší hodnota na nějaké množině
- minimum = nejmenší hodnota na nějaké množině

Př. 1: Najdi na obrázku všechny extrémů nakreslené funkce



Na obrázku je několik extrémů: minima jsou značena červeným křížkem, maxima fialovým.



Nejasná je situace pro $x \in \langle -4; -3 \rangle$. Je tam nekonečně mnoho hodnot, které jsou stejně velké a větší než hodnoty okolo.

Nezbývá než si definici ujasnit, co je vlastně extrém:

Funkce f má v bodě x_0 **lokální maximum**, existuje-li takové okolí $\mathbf{U}_\delta(x_0)$ bodu x_0 , že pro všechna x z $\mathbf{U}_\delta(x_0) \cap D(f)$ platí $f(x) \leq f(x_0)$.

Funkce f má v bodě x_0 **lokální minimum**, existuje-li takové okolí $\mathbf{U}_\delta(x_0)$ bodu x_0 , že pro všechna x z $\mathbf{U}_\delta(x_0) \cap D(f)$ platí $f(x) \geq f(x_0)$.

\Rightarrow funkce z obrázku má maximum ve všech bodech intervalu $\langle -4; -3 \rangle$

Existuje typ extrémů, do kterého body vyznačené křížky s otazníkem nepatří.

Maxima v bodě x_0 , pro která nastává rovnost $f(x) = f(x_0)$ pouze pro $x = x_0$ se nazývají **ostrá maxima**.

Minima v bodě x_0 , pro která nastává rovnost $f(x) = f(x_0)$ pouze pro $x = x_0$ se nazývají **ostrá minima**.

Všechna minima (i maxima) na obrázku nejsou stejně minimální:

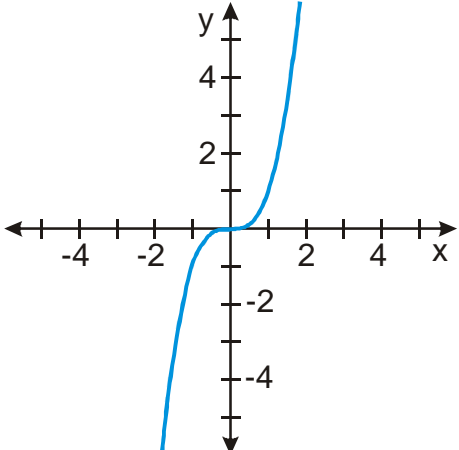
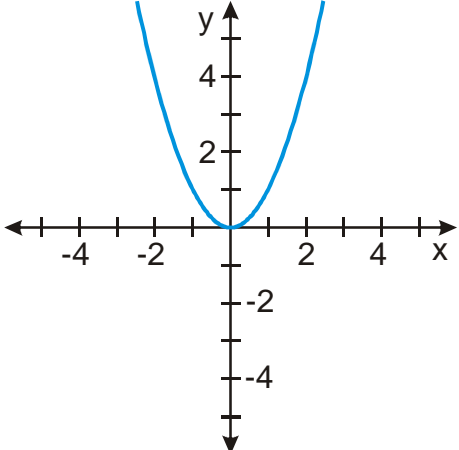
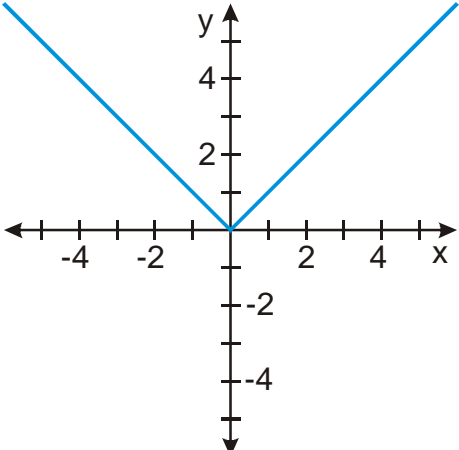
- hodnoty některých jsou menší než hodnoty funkce v jejich okolí \Rightarrow **lokální minima**
- hodnota minima v bodě $x = -5$ je nejmenší hodnotou funkce v zobrazeném intervalu \Rightarrow **globální minimum** (je samozřejmě také lokální)

Jak extrémy najdeme, když nevidíme graf funkce?

- pokud má mít funkce v bodě x_0 extrém, nemůže v tomto bodě ani růst (pak by hodnoty napravo byly větší a nalevo menší) ani klesat (pak by hodnoty vpravo byly menší a nalevo větší) \Rightarrow derivace musí být nulová $f'(x_0) = 0$

- když si představíme tečny grafu funkce v jednotlivých bodech, vidíme, že tečny v extrémech jsou vždy vodorovné \Rightarrow derivace musí být nulová $f'(x_0) = 0$

Př. 2: Prozkoumej extrémy funkcí $y = x^2$, $y = x^3$, $y = |x|$ a rozhodni, jak souvisí nulová hodnota derivace s existencí extrému.

	<p>Funkce $y = x^3$ nemá extrém $y' = 3x^2$, derivace je nulová v bodě $x_0 = 0$ \Rightarrow funkce můžem mít body s nulovou derivací, ve kterých není extrém</p>
	<p>Funkce $y = x^2$ má v bodě $x_0 = 0$ minimum $y' = 2x$, derivace je nulová v bodě $x_0 = 0$ \Rightarrow pokud funkce extrém má je v něm nulová derivace</p>
	<p>Funkce $y = x$ má minimum v bodě $x_0 = 0$ derivace v bodě $x_0 = 0$ neexistuje \Rightarrow funkce můžem mít extrém v bodech, ve kterých neexistuje derivace</p>

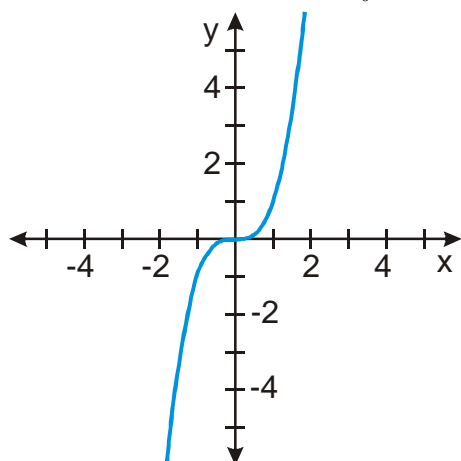
pokud derivace v bodě x_0 existuje a v bodě je extrém, musí být derivace nulová. Obráceně to neplatí, z nulové hodnoty derivace nevyplývá existence extrému

Naše objevy shrnuje věta:

Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li v tomto bodě derivace $f'(x_0)$, pak platí $f'(x_0) = 0$.

Body, pro které platí $f'(x_0) = 0$ se nazývají **stacionární body**. Extrém v nich být může, ale nemusí.

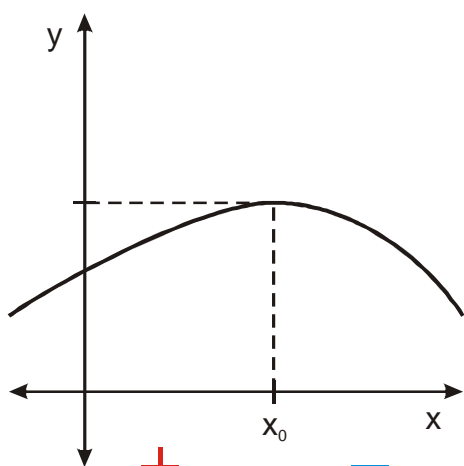
Co musíme přidat k podmínce nulové hodnoty derivace, abychom měli jistotu, že je v bodě extrém? Proč není v bodě $x_0 = 0$ u funkce $y = x^3$ extrém?



Funkce po celou dobu roste. V bodě $x_0 = 0$ jen na chvíli „zastaví“, derivace na obou stranách rovnosti je kladná.

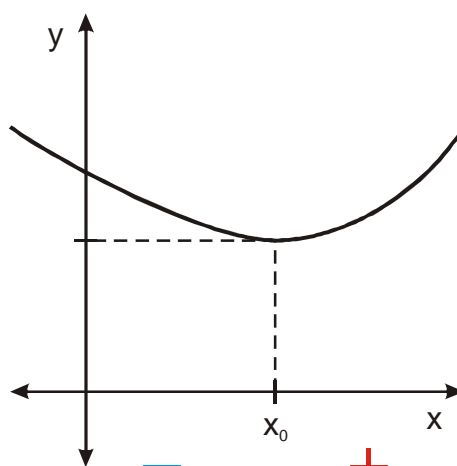
⇒ Pokud má v bodě x_0 existovat extrém musí v tomto bodě první derivace změnit znaménko.

Př. 3: Nakresli obrázky funkcí, které mají v bodě x_0 nulovou derivací a mají (nemají) v tomto bodě extrém. Ověř platnost předchozí úvahy a rozhodni zda je možné ze znamének derivace vyčíst, že zda půjde o maximum nebo minimum.



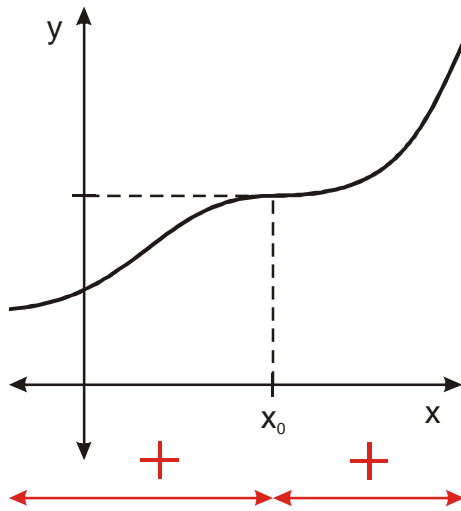
V bodě x_0 má funkce **maximum**

derivace v bodě x_0 změnila znaménko z + na - (funkce se z rostoucí změnila na klesající)

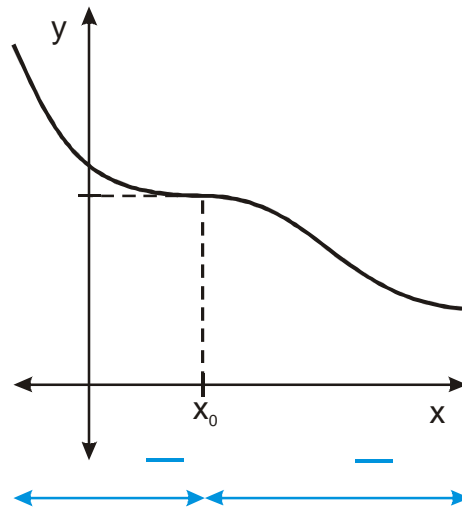


V bodě x_0 má funkce **minimum**

derivace v bodě x_0 změnila znaménko z - na + (funkce se z klesající změnila na rostoucí)



V bodě x_0 funkce **nemá extrém**
 derivace v bodě x_0 nezměnila znaménko je
 stále kladná (funkce je stále rostoucí)



V bodě x_0 funkce **nemá extrém**
 derivace v bodě x_0 nezměnila znaménko je
 stále záporná (funkce je stále klesající)

Náš odhad byl správný:

Nechť $f'(x_0) = 0$. Jestliže existuje takové okolí $U_\delta(x_0)$, že v intervalech $(x_0 - \delta; x_0)$ a $(x_0; x_0 + \delta)$ má $f'(x)$ různá znaménka, má funkce f v bodě x_0 ostrý lokální extrém. Mění-li se znaménko derivace z plus na minus, má funkce v bodě x_0 lokální maximum, mění-li se znaménko derivace z minus na plus, má funkce v bodě x_0 lokální minimum.

Př. 4: Najdi lokální extrémy funkce $y = x^2 + 2x + 3$.

Zderivujeme funkci: $y' = (x^2 + 2x + 3)' = 2x + 2$

Hledáme stacionární body: $y' = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$

\Rightarrow v bodě $x = -1$ může mít funkce $y = x^2 + 2x + 3$ extrém

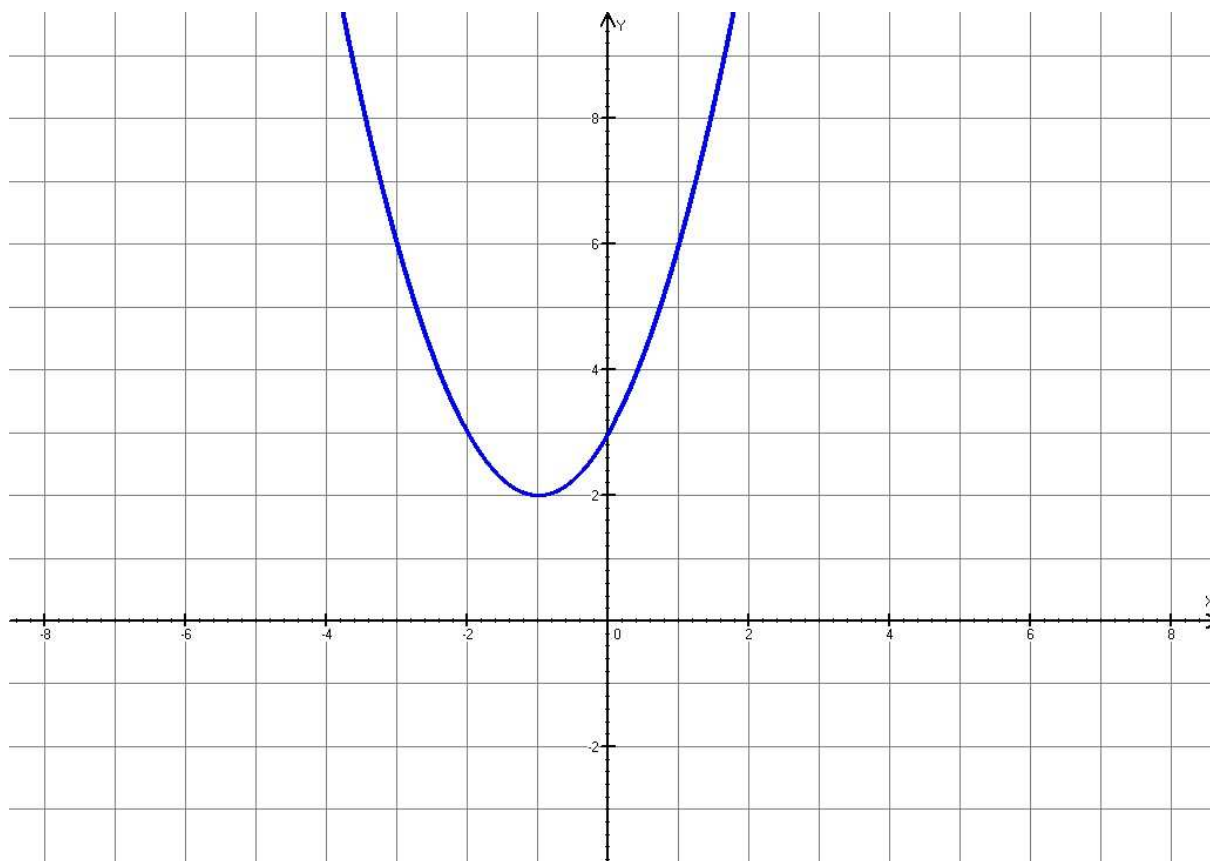
mění se v bodě $x = -1$ znaménko derivace?

$x < -1 \Rightarrow y' = 2x + 2 < 0$ $x > -1 \Rightarrow y' = 2x + 2 > 0$

\Rightarrow funkce $y = x^2 + 2x + 3$ se v bodě $x = -1$ mění z klesající na rostoucí \Rightarrow má v bodě

$x = -1$ lokální ostré minimum

výsledek si ověříme grafem



Př. 5: Najdi lokální extrémů funkce $y = 3x^4 - 4x^3$.

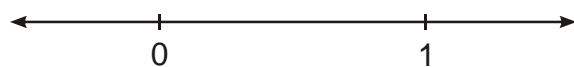
Zderivujeme funkci: $y' = (3x^4 - 4x^3)' = 3 \cdot 4x^3 - 4 \cdot 3x^2 = 12x^3 - 12x^2$

Hledáme stacionární body: $y' = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1) = 0$

\Rightarrow dva stacionární body $x_1 = 0$, $x_2 = 1 \Rightarrow$ zkoumáme znaménko derivace:

nerovnice: $12x^2(x-1) > 0$

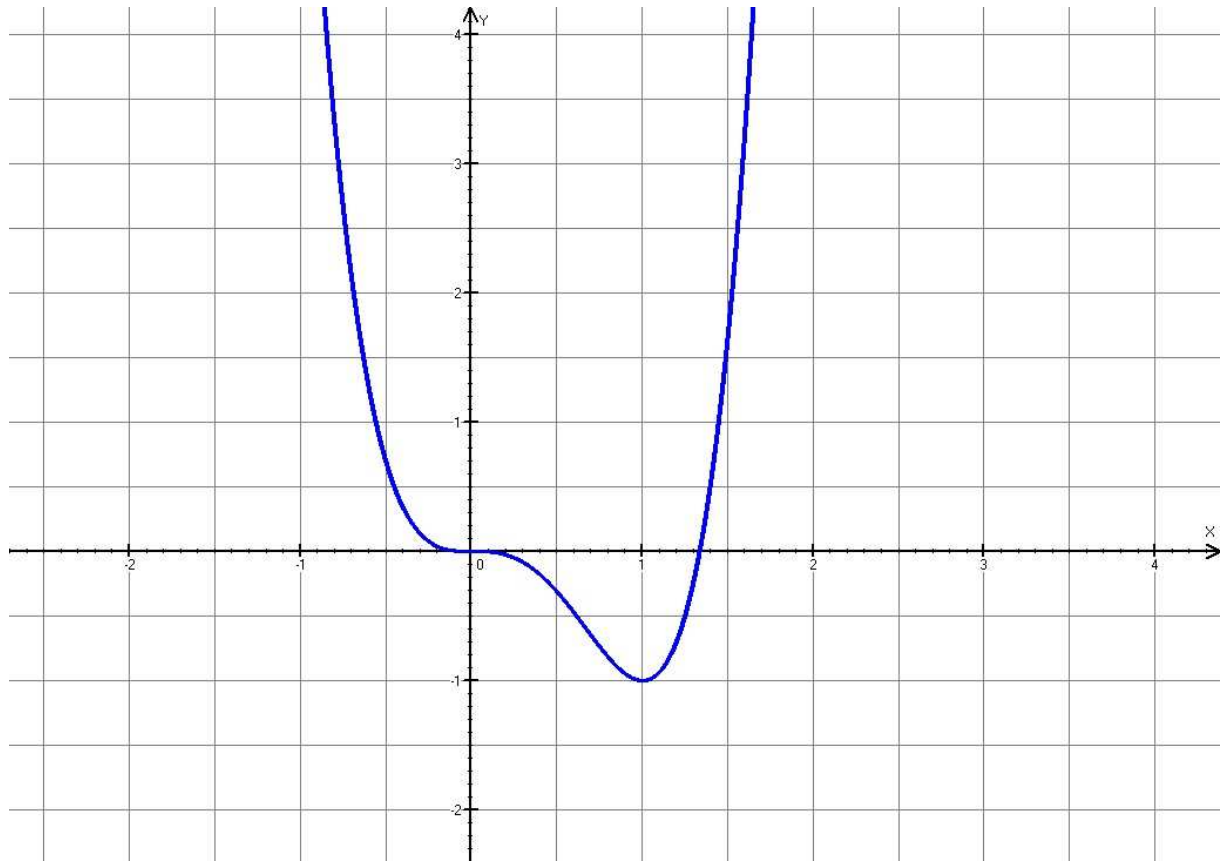
+ • - = - + • - = - + • + = +



v bodě $x_1 = 0$ se znaménko derivace nemění \Rightarrow není tam extrém

v bodě $x_2 = 1$ se znaménko derivace mění \Rightarrow je tam extrém (minimum)

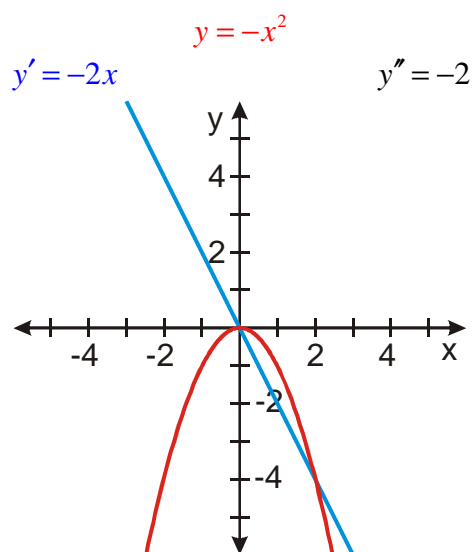
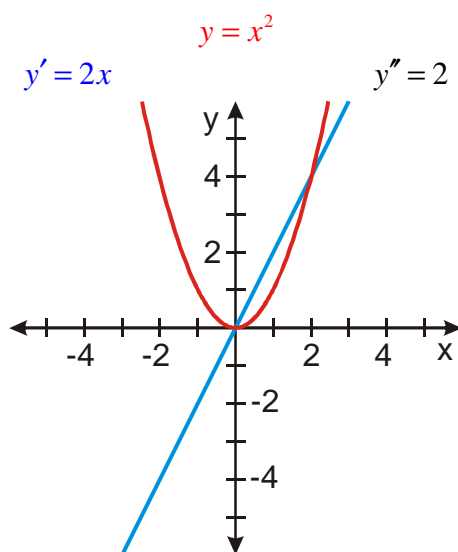
Opět zkontrolujeme výsledek pohledem na graf:



Řešení nerovnic kvůli odhalování extrémů není příliš pohodlné.

Nápad: Extrémy se nacházejí ve stacionárních bodech, ve kterých se mění znaménko první derivace \Rightarrow mění se tam hodnota první derivace, ale změnu hodnoty první derivace popisuje druhá derivace \Rightarrow možná bychom mohli rozhodnout o existenci extrémů i pomocí druhé derivace

Př. 6: Nakresli vedle sebe obrázky funkcí $y = x^2$ a $y = -x^2$. Do každého obrázku dokresli graf jejich první derivace, spočti jejich druhé derivace a rozhodni, zda mají extrém. Zhodnot' situaci.



Funkce má v bodě $x_0 = 0$ ostré minimum, její derivace v bodě $x_0 = 0$ mění znaménko z minus na plus, o čemž vypovídá i kladná hodnota druhé derivace

Funkce má v bodě $x_0 = 0$ ostré maximum, její derivace v bodě $x_0 = 0$ mění znaménko z plus na minus, o čemž vypovídá i záporná hodnota druhé derivace

Nechť $f'(x_0) = 0$ a necht' existuje v bodě x_0 druhá derivace.

- Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré maximum
- je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré minimum
- je-li $f''(x_0) = 0$, nelze o existenci lokálního extrému rozhodnout

Př. 7: Použij pravidlo pro určování extrému pomocí druhé derivace u příkladů 4 a 5.

Zderivujeme funkci: $y' = (x^2 + 2x + 3)' = 2x + 2$

Hledáme stacionární body: $y' = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$

\Rightarrow v bodě $x = -1$ může mít funkce $y = x^2 + 2x + 3$ extrém

druhá derivace: $y'' = (2x + 2)' = 2$

hodnota druhé derivace je v bodě $x = -1$ kladná \Rightarrow má v bodě $x = -1$ lokální ostré minimum

Zderivujeme funkci: $y' = (3x^4 - 4x^3)' = 3 \cdot 4x^3 - 4 \cdot 3x^2 = 12x^3 - 12x^2$

Hledáme stacionární body: $y' = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1) = 0$

\Rightarrow dva stacionární body $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

druhá derivace: $y'' = (12x^3 - 12x^2)' = 36x^2 - 24x$

- hodnota druhé derivace v $x_1 = 0$: $y'' = 36x^2 - 24x = 36 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ tady nám druhá derivace nepomohla, opět bychom se museli vrátit k řešení nerovnice
- hodnota druhé derivace v $x_2 = 1$: $y'' = 36x^2 - 24x = 36 \cdot 1^2 - 24 \cdot 1 = 12 \Rightarrow$ funkce má v bodě $x_2 = 1$ lokální ostré minimum

Př. 8: Najdi lokální extrém funkce $y = x^3 - 3x$.

Zderivujeme funkci: $y' = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$

Hledáme stacionární body: $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1) = 0$

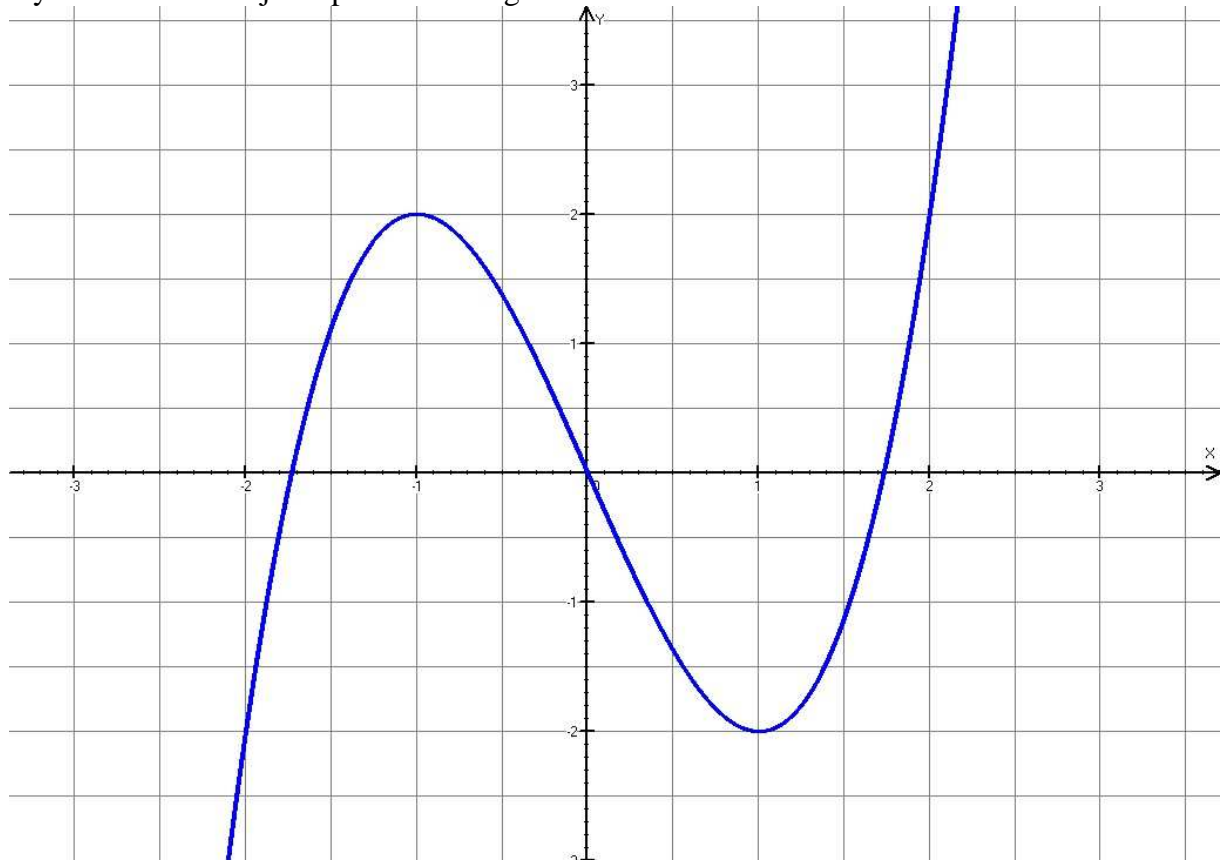
\Rightarrow dva stacionární body $x_1 = -1$, $x_2 = 1$

druhá derivace: $y'' = (3x^2 - 3)' = 6x$

- hodnota druhé derivace v $x_1 = -1$: $y'' = 6x = 6(-1) = -6 \Rightarrow$ funkce má v bodě $x_1 = -1$ lokální ostré maximum

- hodnota druhé derivace v $x_2 = 1$: $y'' = 6x = 6 \cdot 1 = 6 \Rightarrow$ funkce má v bodě $x_2 = 1$ lokální ostré minimum

Výsledek zkontrolujeme pohledem na graf:



Př. 9: Najdi globální extrémy funkce $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ v intervalu $\langle -3; 3 \rangle$.

Postupujeme stejně jako v předchozích příkladech. Kromě nalezených extrémů musíme spočítat i hodnoty v krajních bodech:

$$f(-3) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 = 2(-3)^3 - 3(-3)^2 - 12(-3) + 8 = -37$$

$$f(3) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 = 2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 8 = -1$$

$$\text{Zderivujeme funkci: } y' = (2x^3 - 3x^2 - 12x + 8)' = 6x^2 - 6x - 12$$

$$\text{Hledáme stacionární body: } y' = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x - 2)(x + 1) = 0$$

\Rightarrow dva stacionární body $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

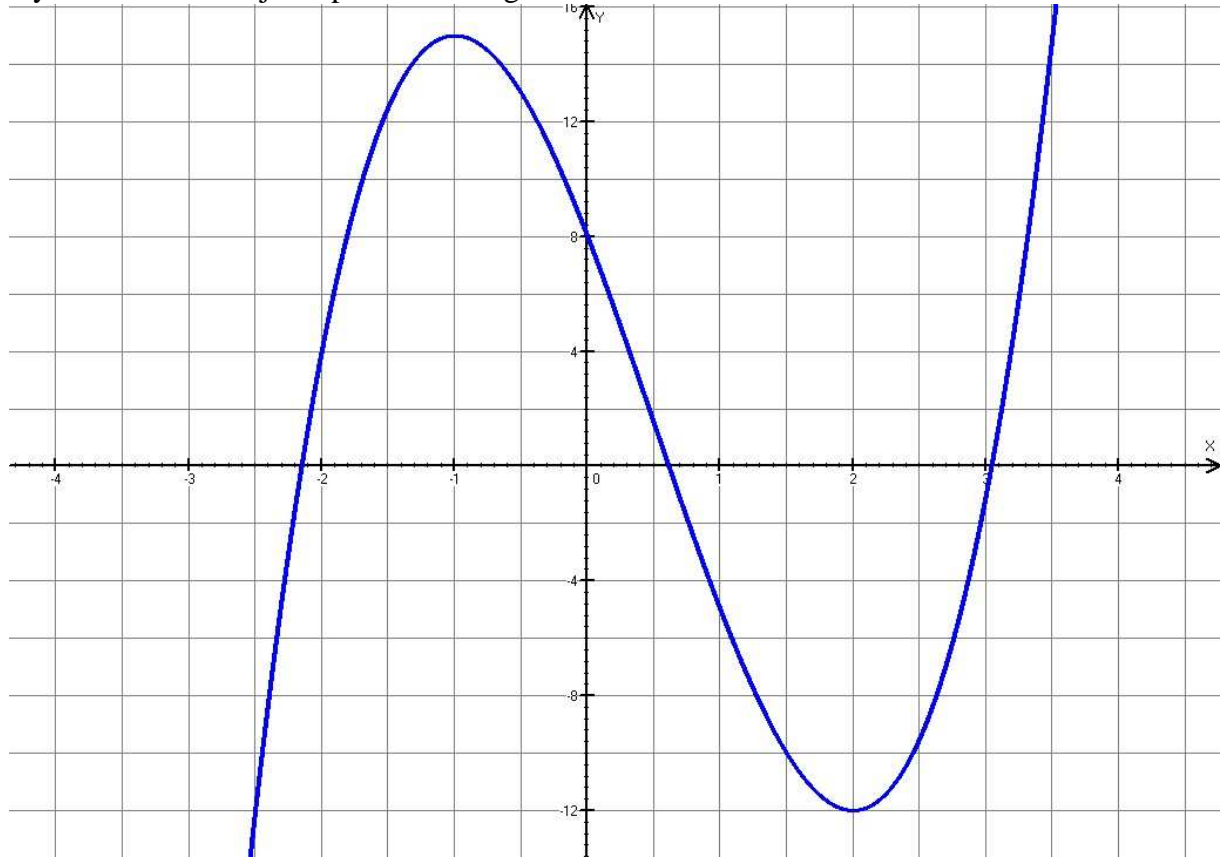
$$\text{druhá derivace: } y'' = (6x^2 - 6x - 12)' = 12x - 6$$

- hodnota druhé derivace v $x_1 = -1$: $y'' = 12x - 6 = 12(-1) - 6 = -18 \Rightarrow$ funkce má v bodě $x_1 = -1$ lokální ostré maximum
hodnota: $f(-1) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 8 = 15$
- hodnota druhé derivace v $x_2 = 2$: $y'' = 12x - 6 = 12 \cdot 2 - 6 = 18 \Rightarrow$ funkce má v bodě $x_2 = 2$ lokální ostré minimum
hodnota: $f(2) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 8 = -12$

po porovnání hodnot vidíme, že funkce $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ má v intervalu $\langle -3; 3 \rangle$:

- globální maximum v bodě $x_1 = -1$ s hodnotou 15
- globální minimum v bodě $x_3 = -3$ s hodnotou -37

Výsledek zkontrolujeme pohledem na graf:



Př. 10: Petáková:

strana 158/cvičení 44 f_3, f_6

strana 158/cvičení 45 g_1, g_4

strana 158/cvičení 46 h_1

strana 158/cvičení 47

Shrnutí: