

## 10.2.10 Průběh funkce I (monotónnost)

**Předpoklady:** 10202, 10209

**Pedagogická poznámka:** Tato hodina je značně obsáhlá, tak je nutné buď přenechat poslední příklad na příští hodinu, nebo se příliš nezdržovat úvodní částí.

V této a několika následujících hodinách se budeme zabývat průběhem funkce a tím, co vše se o něm dá pomocí derivací zjistit. Na začátek se seznámíme se dvěma větami, jejichž důležitost poznáme pouze částečně.

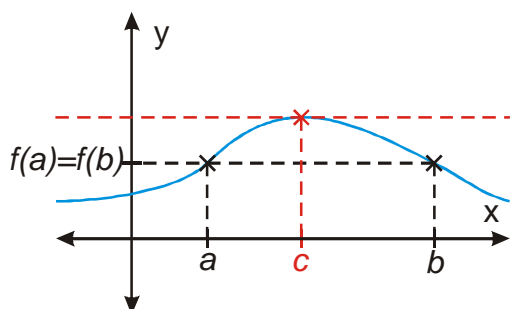
### Rolleova věta:

Mějme funkci  $f$ , která má tyto vlastnosti:

- je spojitá v uzavřeném intervalu  $\langle a; b \rangle$
- v každém bodě otevřeného intervalu  $(a; b)$  má derivaci
- $f(a) = f(b)$

Potom existuje v otevřeném intervalu  $(a; b)$  aspoň jeden bod  $c$ , pro který platí  $f'(c) = 0$ .

**Př. 1:** Nakresli obrázek libovolné funkce, která splňuje předpoklady Rolleovy věty. Do obrázku vyznač bod  $c$ .



Funkce má mít v bodě  $c$  nulovou derivaci  $\Rightarrow$  tečna v tomto bodě musí být rovnoběžná s osou  $x$ , funkce nesmí v bodě ani růst ani klesat

**Pedagogická poznámka:** Můžete nechat studenty, aby zkusili nakreslit funkci, která splňuje podmínky věty a nemá nikde nulovou derivaci.

**Př. 2:** Ověř platnost Rolleovy věty pro funkce:

a)  $y = x^2 - 2x$ ,  $x \in \langle -1; 3 \rangle$

b)  $y = |x|$ ,  $x \in \langle -1; 1 \rangle$

a)  $y = x^2 - 2x$ ,  $x \in \langle -1; 3 \rangle$

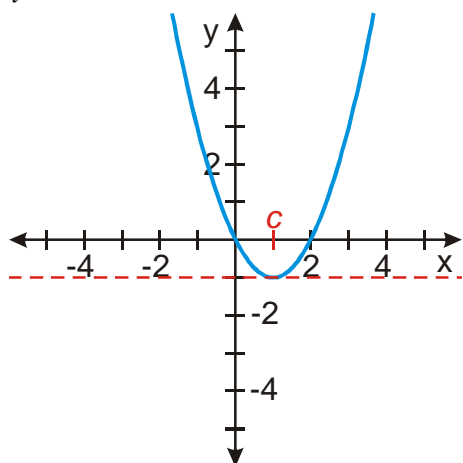
spojitost – ano, jde o polynomickou funkci

existence derivace:  $(x^2 - 2)' = 2x - 2 \Rightarrow$  existuje pro každé  $x \in \langle -1; 3 \rangle$

$f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) = 3$      $f(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 = 3 \Rightarrow f(a) = f(b)$

$\Rightarrow$  předpoklady platí  $\Rightarrow$  musí existovat bod s nulovou derivací:

$$y' = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$



Jde o graf funkce  $y = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$

b)  $y = |x|$ ,  $x \in \langle -1; 1 \rangle$

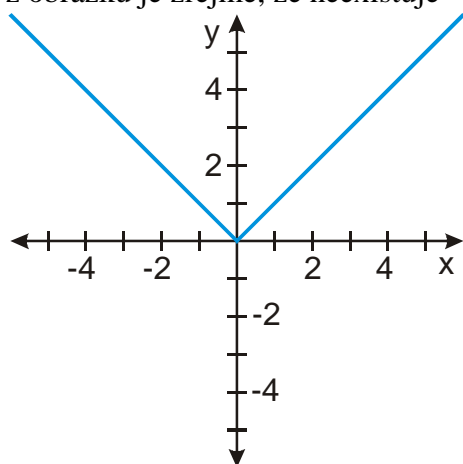
spojitost – ano

existence derivace: funkce  $y = |x|$  má špičku  $\Rightarrow$  pro  $x = 0$  derivace neexistuje

$$f(-1) = |-1| = 1 \quad f(1) = |1| = 1 \Rightarrow f(a) = f(b)$$

$\Rightarrow$  předpoklady neplatí  $\Rightarrow$  nemusí existovat bod s nulovou derivací:

z obrázku je zřejmé, že neexistuje



**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad je dobrým místem na zdůraznění toho, derivace neexistuje tam, kde má funkce „ostré hrany“.

**Lagrangeova věta o střední hodnotě:**

Mějme funkci  $f$ , která má tyto vlastnosti:

a) je spojitá v uzavřeném intervalu  $\langle a; b \rangle$

b) v každém bodě otevřeného intervalu  $(a; b)$  má derivaci

Potom existuje v otevřeném intervalu  $(a; b)$  aspoň jeden bod  $c$ , pro který platí

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} ..$$

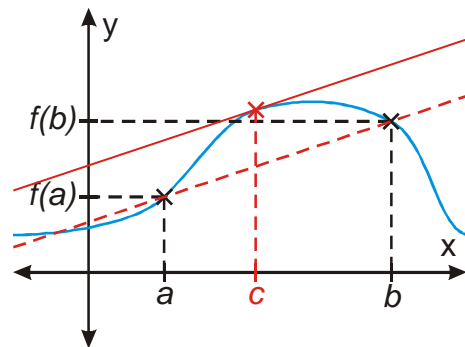
**Př. 3:** Jaký je vztah mezi Rolleovou a Lagrangeovou větou?

Rolleova věta obsahuje v předpokladech podmínku navíc. Pokud by hodnoty funkce v bodech  $a, b$  byly stejné, platilo by  $f(b) - f(a) = 0$  a pro hodnotu derivace bychom dostali

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0}{b - a} = 0 \Rightarrow \text{pro } f(b) = f(a) \text{ přechází Lagrangeova věta ve větu}$$

Rolleovu  $\Rightarrow$  Rolleova věta je speciální případ věty Lagrangeovy

**Př. 4:** Nakresli obrázek libovolné funkce, která splňuje předpoklady Rolleovy věty. Do obrázku vyznač bod  $c$ .



Tečna grafu funkce má v bodě  $c$  stejný směr jako přímka daná body  $[a; f(a)]$  a  $[b; f(b)]$ .

Kromě geometrické interpretace z předchozího příkladu můžeme Lagrangeovu větu interpretovat i fyzikálně (na mnoha různých případech). Na příklad u pohybu můžeme postupovat takto:

$y = s(t)$  - závislost dráhy na čase  $\Rightarrow$  místo  $a, b$  píšeme  $t_1, t_2$ , místo  $f(b), f(a)$  píšeme

$$s(t_2), s(t_1) \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \bar{v} = \text{pomocí hodnot v krajních bodech}$$

jsme určili průměrnou rychlost.

$$\text{okamžitá rychlost: } f'(c) = \frac{ds}{dt}(c) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \bar{v}$$

$\Rightarrow$  v některém z okamžiků se okamžitá rychlost rovná průměrné rychlosti.

Ve skutečnosti je Lagrangeova věta užitečnější než se nám teď zdá.

**Př. 5:** (BONUS) Dokaž sporem pomocí Lagrangeovy věty větu: Platí-li  $f'(x) = 0$  pro každé  $x \in (a; b)$ , potom je  $f$  konstantní funkce.

Předpokládáme, že platí  $f'(x) = 0$  a zároveň funkce  $f(x)$  není konstantní. Pokud funkce není konstantní musí v intervalu  $(a; b)$  existovat čísla  $x_1, x_2$  jejichž hodnoty nejsou stejné  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Z těchto bodů sestavíme kraje nového intervalu  $\langle x_1; x_2 \rangle$ , ve kterém podle

Lagrangeovy věty existuje bod  $x$  pro který platí  $f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$ . Což už je rozpor

s předpokladem.

## Monotónnost funkce a derivace

monotónnost = zda je funkce rostoucí nebo klesající. Místo zadání: „Urči, kdy je funkce rostoucí nebo klesající“, budeme řešit příklady „Urči monotónnost funkce“.

**Př. 6:** Zformuluj vztah mezi monotónností funkce v intervalu  $(a;b)$  a hodnotami její derivace v tomto intervalu.

Na grafech jsme si to již ukazovali mnohokrát:

Má-li funkce  $f$  v každém bodě intervalu  $(a;b)$  kladnou derivaci, je v tomto intervalu rostoucí.

Má-li funkce  $f$  v každém bodě intervalu  $(a;b)$  zápornou derivaci, je v tomto intervalu klesající.

**Pedagogická poznámka:** Část studentů si to určitě bude pamatovat, té druhé napíšu na tabuli vztah pro derivaci funkce v bodě a ukážeme si, jak musí funkce vypadat, aby ze vztahu vypadlo kladné nebo záporné číslo. Blíže v hodině 10202.

**Př. 7:** Dokumentuj vztah mezi monotónností funkce a hodnotami její derivace na funkcích:

a)  $y = x^2$

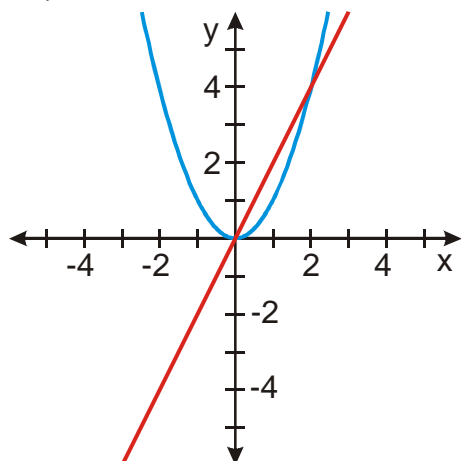
b)  $y = x^3$

c)  $y = \frac{1}{x}$

Pro každou funkci jsou v jednom obrázku nakresleny dva grafy:

- modře graf funkce
- červeně graf její derivace

a)  $y = x^2$



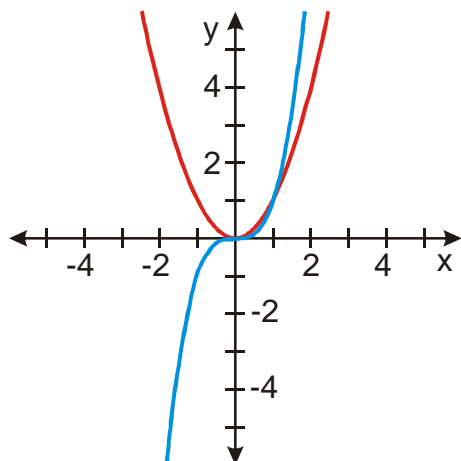
Funkce  $y = x^2$  je rostoucí v intervalu  $\langle 0; \infty$

V intervalu  $\langle 0; \infty$  jsou hodnoty derivace (funkce  $y = 2x$ ) kladné

Funkce  $y = x^2$  je klesající v intervalu  $(-\infty; 0)$

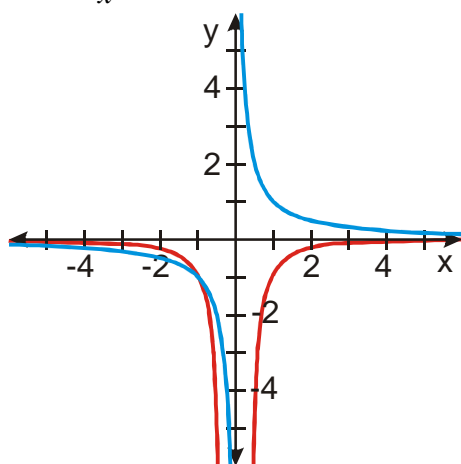
V intervalu  $(-\infty; 0)$  jsou hodnoty derivace (funkce  $y = 2x$ ) záporné

b)  $y = x^3$



Funkce  $y = x^3$  je rostoucí v  $\mathbb{R}$   
 Hodnoty derivace (funkce  $y = 3x^2$ ) jsou kladné

c)  $y = \frac{1}{x}$



Funkce  $y = \frac{1}{x}$  je klesající v intervalech  $(-\infty; 0)$  a  $(0; \infty)$ .

Hodnoty derivace (funkce  $y = -\frac{1}{x^2}$ ) jsou v obou těchto intervalech záporné.

**Př. 8:** Urči intervaly monotónnosti funkcí:

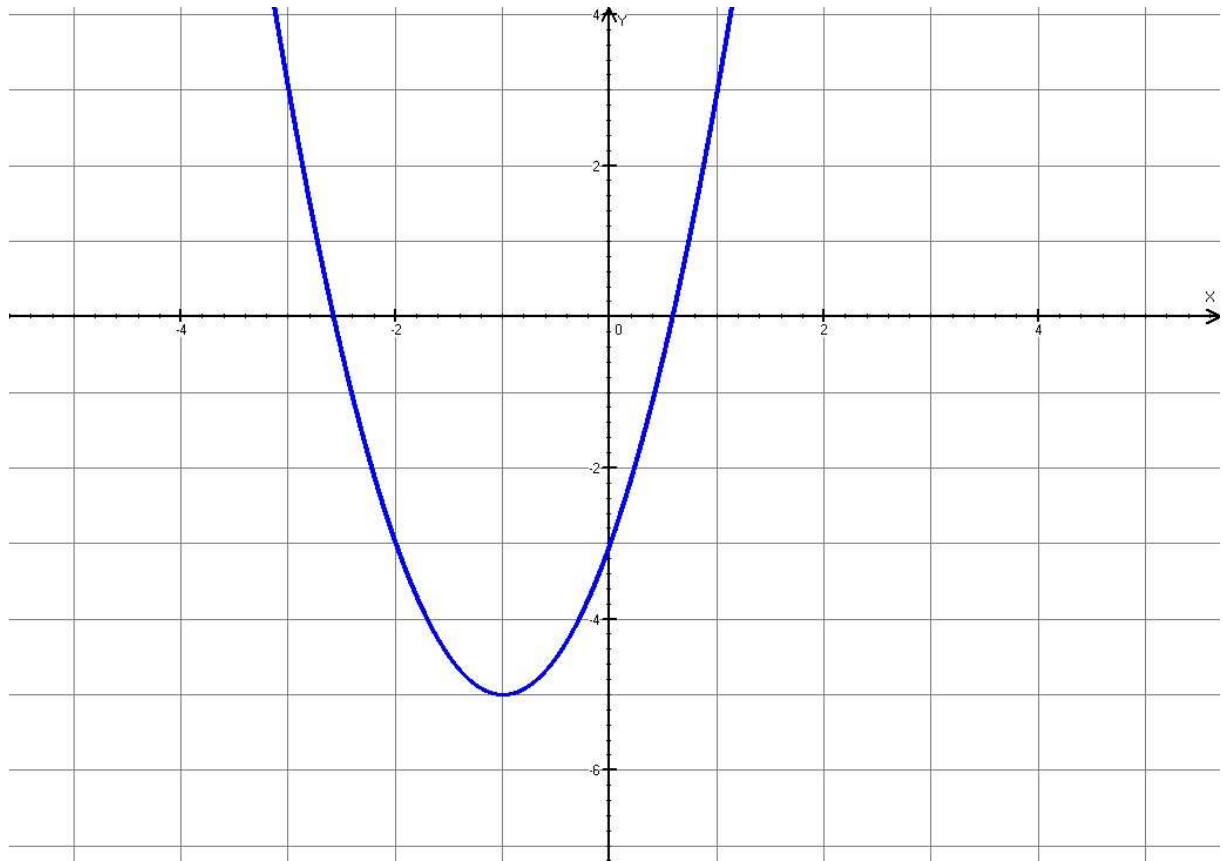
a)  $y = 2x^2 + 4x - 3$

b)  $y = x^3 - 3x$

a)  $y = 2x^2 + 4x - 3$

$y' = 4x + 4$ , řešíme nerovnici  $4x + 4 > 0$

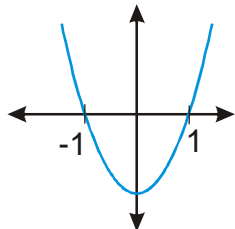
$x > -1 \Rightarrow$  pro  $x \in (-1; \infty)$  derivace funkce  $y = 4x + 4$  je kladná a funkce  $y = 2x^2 + 4x - 3$  je rostoucí, kontrolou je třeba graf



b)  $y = x^3 - 3x$

$y' = 3x^2 - 3$ , řešíme nerovnici  $3x^2 - 3 > 0$   $/:3$   $x^2 - 1 > 0$

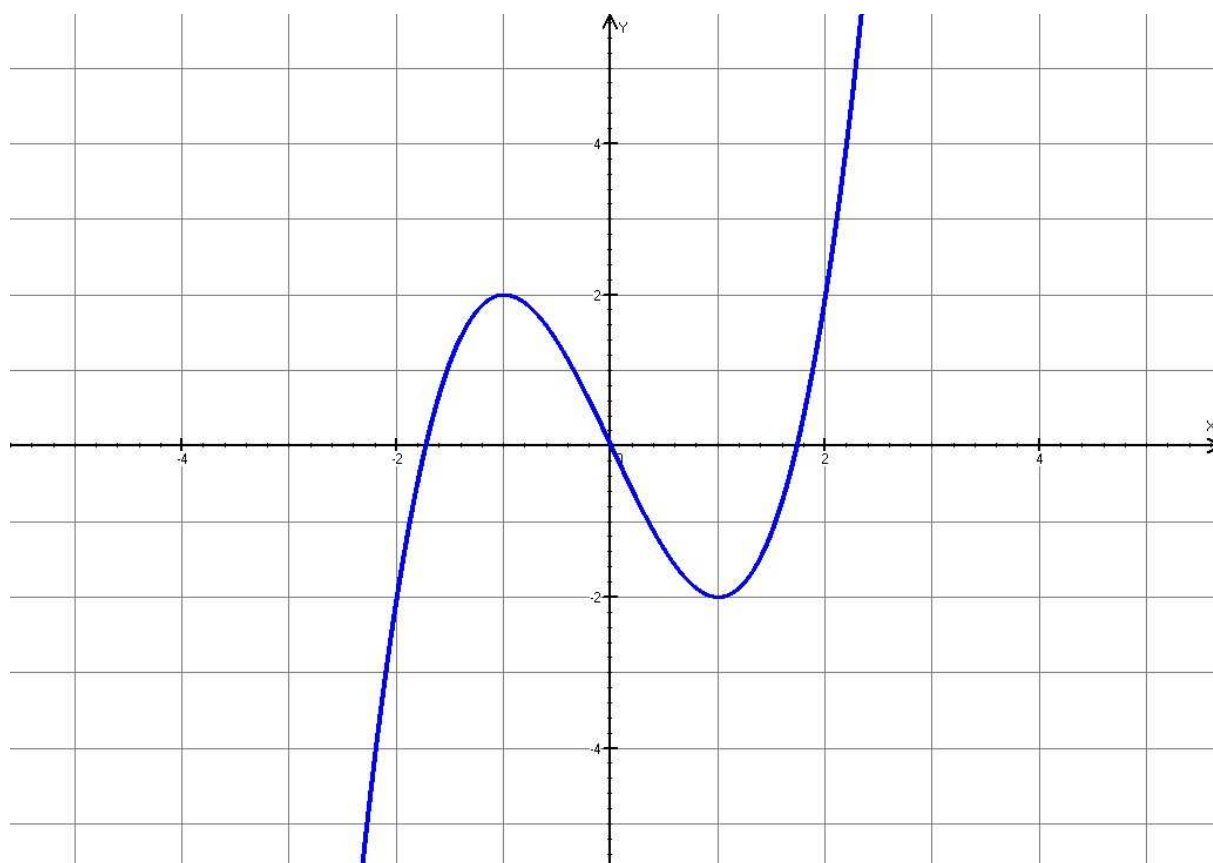
nulové body:  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$ , před  $x^2$  je +  $\Rightarrow$  grafem je "d'olík"



$x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$   $3x^2 - 3 = y' > 0 \Rightarrow$  funkce  $y = x^3 - 3x$  je rostoucí

$x \in (-1; 1)$   $3x^2 - 3 = y' < 0 \Rightarrow$  funkce  $y = x^3 - 3x$  je klesající

Opět můžeme výsledek zkonrolovat pomocí grafu



**Př. 9:** Petáková:

strana 157/cvičení 38  $f_1, f_5$

strana 158/cvičení 39  $g_1, g_4, g_5, g_{10}$

**Shrnutí:** Podle znaménka derivace poznáme, zda je funkce rostoucí nebo klesající.