10.2.8 Derivace složené funkce II

Předpoklady: 2914, 10207

K tomu, abychom uměli derivovat cokoliv nám schází ještě vzorce pro derivaci několika posledních elementárních funkcí:

Pro funkci $y = e^x$**,** $x \in R$**, platí** $y' = e^x$**.** (To už víme od druháku, kvůli tomu jsme přirozenou exponenciální funkci zaváděli).

Pro funkci $y = a^x$**,** $x \in R$**,** $a \in R^+ - \{1\}$ **platí** $y' = a^x \cdot \ln a$**.**

Pro funkci $y = \ln x$**,** $x \in R^+$**, platí** $y' = \frac{1}{x}$**.**

Pro funkci $y = \log_a x$**,** $x \in R^+$**,** $a \in R^+ - \{1\}$ **platí** $y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$**.**

Dodatek: Můžeme si všimnout několika věcí:
Přirozený logaritmus má (podobně jako přirozená exponenciální funkce) nejjednodušší derivaci ze všech logaritmických funkcí.
Při derivování mocninných funkcí x^n získáváme jako výsledky opět mocninné funkce $n \cdot x^{n-1}$. Jedinou mocninou funkcí, kterou nezískáme jako výsledek derivování jiné mocninné funkce je funkce $y = \frac{1}{x}$, která je derivací logaritmu.

Př. 1: Urči derivace:

a) $\left(x^2 + 2e^x\right)'$ b) $\left(x^3 + 2^x\right)'$ c) $\left(x - 2\ln x\right)'$ d) $\left(\sqrt{x} + \ln 2 \cdot \log_2 x\right)'$

a) $\left(x^2 + 2e^x\right)' = 2x + 2e^x$

b) $\left(x^3 + 2^x\right)' = 3x^2 + 2^x \cdot \ln 2$

c) $\left(x - 2\ln x\right)' = 1 - 2\frac{1}{x} = 1 - \frac{2}{x}$

d) $\left(\sqrt{x} + \ln 2 \cdot \log_2 x\right)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} + \ln 2 \cdot \frac{1}{x \ln 2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$

Př. 2: Urči derivace:

a) $\left(x^2 e^x\right)'$ b) $\left(x \cdot \log_2 x\right)'$ c) $\left(\ln^2 x\right)'$ d) $\left(2^{\sin x}\right)'$

a) $\left(x^2 e^x\right)' = 2x \cdot e^x + x^2 e^x$

b) $\left(x \cdot \log_2 x\right)' = 1 \cdot \log_2 x + x \frac{1}{x \ln 2} = \log_2 x + \frac{1}{\ln 2}$

c) $\left(\ln^2 x\right)' = 2\ln x \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$

d) $\left(2^{\sin x}\right)' = 2^{\sin x}\cdot\ln 2\cdot(\sin x)' = 2^{\sin x}\cdot\ln 2\cdot\cos x$

Funkce mohou být složené i vícenásobně: $\ln\left(\sin x^2\right)$: $x \xrightarrow{x^2} z \xrightarrow{\sin z} v \xrightarrow{\ln v} y$. Derivujeme stejně jako funkce složené jednoduše:

$$\underbrace{\left[\ln\left(\sin x^2\right)\right]' = \frac{1}{\sin x^2}\left(\sin x^2\right)'}_{(\ln z)' = \frac{1}{z}\cdot z'} = \frac{1}{\sin x^2}\underbrace{\left(\sin x^2\right)' = \frac{1}{\sin x^2}\cos x^2\left(x^2\right)'}_{(\sin z)' = \cos z\cdot z'} =$$

$$= \frac{\cos x^2}{\sin x^2}2x = 2x\cdot\operatorname{cotg} x^2$$

Př. 3: Urči derivace:

a) $\left[\sin\left(e^{5x}\right)\right]'$ b) $\left[2^{\cos\left(x^2+2x\right)}\right]'$ c) $\left[e^{\sin^2 x}\right]'$

a) $\underbrace{\left[\sin\left(e^{5x}\right)\right]' = \cos\left(e^{5x}\right)\left(e^{5x}\right)'}_{(\sin z)' = \cos z\cdot z'} = \cos\left(e^{5x}\right)\underbrace{\left(e^{5x}\right)' = \cos\left(e^{5x}\right)e^{5x}(5x)'}_{\left(e^z\right)' = e^z\cdot z'} = \cos\left(e^{5x}\right)e^{5x}\cdot 5$

$$\underbrace{\left[2^{\cos\left(x^2+2x\right)}\right]' = 2^{\cos\left(x^2+2x\right)}\cdot\ln 2\cdot\left[\cos\left(x^2+2x\right)\right]'}_{\left(2^z\right)' = 2^z\cdot\ln z\cdot z'} =$$

b) $= 2^{\cos\left(x^2+2x\right)}\cdot\ln 2\cdot\underbrace{\left[\cos\left(x^2+2x\right)\right]' = 2^{\cos\left(x^2+2x\right)}\cdot\ln 2\cdot\left[-\sin\left(x^2+2x\right)\right]\left(x^2+2x\right)'}_{(\cos z)' = -\sin z\cdot z'} =$

$$= -2^{\cos\left(x^2+2x\right)}\cdot\ln 2\cdot\sin\left(x^2+2x\right)\cdot(2x+2)$$

c) $\underbrace{\left[e^{\sin^2 x}\right]' = e^{\sin^2 x}\cdot\left(\sin^2 x\right)'}_{\left(e^z\right)' = e^z\cdot z'} = e^{\sin^2 x}\cdot\underbrace{\left(\sin^2 x\right)' = e^{\sin^2 x}\cdot 2\sin x\cdot(\sin x)'}_{\left(z^z\right)' = 2z\cdot z'} = e^{\sin^2 x}\cdot 2\sin x\cdot\cos x$

V některých příkladech nejsou jsou některé z funkcí poznat hůře:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\sin x^2}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x^2}\left(\sin x^2\right)'}_{\left(z^{-1}\right)' = -\frac{1}{z^2}\cdot z'} = -\frac{1}{\sin^2 x^2}\underbrace{\left(\sin x^2\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x^2}\cos x^2\left(x^2\right)'}_{(\sin z)' = \cos z\cdot z'} = -\frac{\cos x^2\cdot 2x}{\sin^2 x^2}$$

Př. 4: Urči derivace:

a) $\left(\sqrt{\operatorname{tg}\left(x^2+2x\right)}\right)'$ b) $\left[\left(\sin^2 x^2+x^3\right)^2\right]'$ c) $\left[\sin^3\left(x^2-1\right)\right]'$

a)

$$\left(\sqrt{\operatorname{tg}\left(x^2+2x\right)}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\left(x^2+2x\right)}\left[\operatorname{tg}\left(x^2+2x\right)\right]'=\frac{1}{2\cdot\operatorname{tg}\left(x^2+2x\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(x^2+2x\right)}\left(x^2+2x\right)'=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\operatorname{tg}\left(x^2+2x\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(x^2+2x\right)}\left(2x+2\right)=\frac{2x+2}{2\cdot\operatorname{tg}\left(x^2+2x\right)\cdot\cos^2\left(x^2+2x\right)}$$

b)

$$\left[\left(\sin^2 x^2+x^3\right)^2\right]'=2\left(\sin^2 x^2+x^3\right)^1\cdot\left(\sin^2 x^2+x^3\right)'=2\left(\sin^2 x^2+x^3\right)^1\left[2\sin x^2\left(\sin x^2\right)'+3x^2\right]=$$

$$2\left(\sin^2 x^2+x^3\right)^1\left(2\sin x^2\cdot\cos x^2\cdot 2x+3x^2\right)$$

c) $$\left[\sin^3\left(x^2-1\right)\right]'=3\sin^2\left(x^2-1\right)\cdot\left[\sin\left(x^2-1\right)\right]'=3\sin^2\left(x^2-1\right)\cdot\cos\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2-1\right)'=$$

$$=3\sin^2\left(x^2-1\right)\cdot\cos\left(x^2-1\right)\cdot 2x$$

Ještě horší situace nastane, když se derivace složené funkce setká se součinem nebo podílem:

Př. 5: Urči derivace:

a) $\left[\sin\left(x^2\cdot\cos x\right)\right]'$ b) $\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x+3}}\right)'$

a) $$\left[\sin\left(x^2\cdot\cos x\right)\right]'=\cos\left(x^2\cdot\cos x\right)\left(x^2\cdot\cos x\right)'=\cos\left(x^2\cdot\cos x\right)\left(2x\cdot\cos x-x^2\sin x\right)$$

b) $$\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x+3}}\right)'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+3}{x^2+1}}\cdot\left(\frac{x^2+1}{x+3}\right)'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+3}{x^2+1}}\cdot\frac{2x\left(x+3\right)-\left(x^2+1\right)\cdot 1}{\left(x+3\right)^2}$$

Př. 6: Petáková:

strana 155/cvičení 19 f_9, f_{10}

strana 156/cvičení 22 f_5, f_{11}, f_{16}

Shrnutí: