

### 10.2.3 Derivace elementárních funkcí I

#### Předpoklady: 10202

Shrnutí z minulé hodiny:

Chceme znát jakým způsobem se mění hodnoty funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$ .

přibližná hodnota změny  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

presnost výpočtu se bude zvětšovat, když se  $\Delta x$  bude zmenšovat  $\Rightarrow$  nekonečně přesný

výsledek:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \text{derivace funkce } f \text{ v bodě } x_0$ .

#### Definice:

Je dána funkce  $f$  definovaná v jistém okolí bodu  $x_0$ . Existuje-li vlastní limita

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  nazýváme ji derivací funkce  $f$  v bodě  $x_0$  a značíme ji symbolem  $f'(x_0)$ .

Různé druhy zápisu:

- $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  - náš základní zápis
- $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  (protože platí  $\Delta x = x - x_0$ )
- $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  (protože platí  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ )

**Poznámka:** Často se také používá zápis  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ , kde  $dy$  a  $dx$  označují nekonečně malé změny proměnných  $y$  a  $x$ .

**Př. 1:** Urči derivaci funkce  $y = x^2$  v bodě  $x_0$ .

Dosadíme do vzorce:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x_0 + \Delta x = 2x_0$$

U předchozí příkladu jsme počítali derivaci v obecném bodě  $x_0$ , nedosazovali jsme konkrétní čísla. Získali jsme tak obecný vztah, do kterého můžeme za  $x_0$  dosazovat konkrétní čísla, která nás zajímají.

**Př. 2:** Urči podle předchozího vztahu derivace funkce  $y = x^2$  v bodech  $-2; 0, 1, 3$ . Porovnej výsledky s grafem funkce  $y = x^2$ .

Stačí dosazovat do vztahu  $f'(x_0) = 2x_0$ :

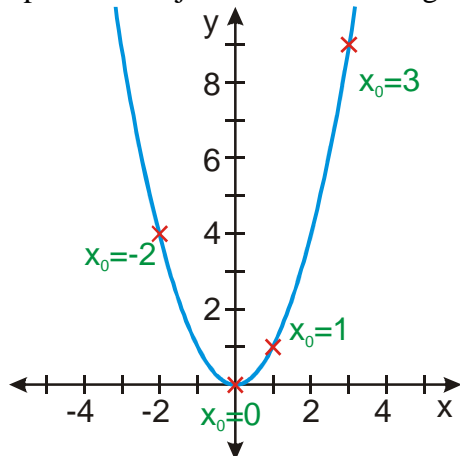
$x_0 = -2$ :  $f'(-2) = 2(-2) = -4 \Rightarrow$  funkce  $y = x^2$  v bodě  $-2$  klesá

$x_0 = 0$ :  $f'(0) = 2(0) = 0 \Rightarrow$  funkce  $y = x^2$  v bodě  $0$  neklesá ani neroste

$x_0 = 1$ :  $f'(1) = 2(1) = 2 \Rightarrow$  funkce  $y = x^2$  v bodě  $1$  roste

$x_0 = 3$ :  $f'(3) = 2(3) = 6 \Rightarrow$  funkce  $y = x^2$  v bodě  $3$  roste více než v bodě  $1$

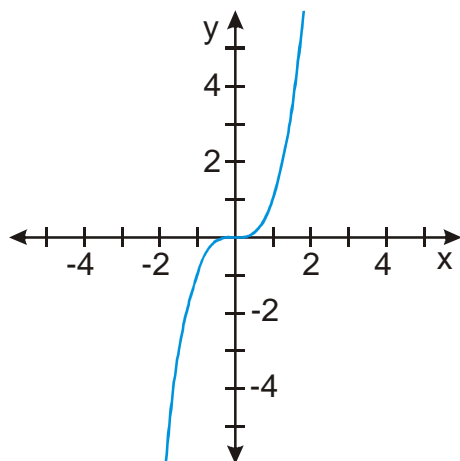
Spočtené údaje dobře souhlasí s grafem:



Na výraz  $2x_0$ , do kterého jsme dosazovali při výpočtech derivací v bodě se můžeme dívat jako na předpis funkce, jejíž hodnoty udávají hodnotu derivace v bodě. Takovou funkci značíme  $y'$  nebo  $f'(x)$  a mluvíme o ní jako o derivaci funkce  $y$ .

Funkce  $y' = f'(x)$  může mít opět derivaci. Této funkci pak říkáme **druhá derivace funkce**  $y = f(x)$  a značíme ji  $y'' = f''(x)$ .

**Př. 3:** Načrtni graf funkce  $y = x^3$  a odhadni velikost její derivace v bodě  $0$ . Poté vypočti tuto derivaci pomocí vzorce.

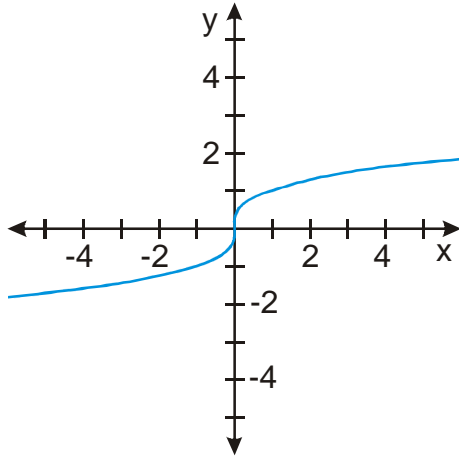


Kolem nuly je graf funkce vodorovný  $\Rightarrow$  mělo by platit  $f'(0) = 0$ .

Dosadíme do vzorce:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(0 + \Delta x)^3 - 0^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x^2 = 0$$

**Př. 4:** Načrtni graf funkce  $y = \sqrt[3]{x}$  (s definičním oborem  $R$ ) a odhadni velikost její derivace v bodě 0. Poté vypočti tuto derivaci pomocí vzorce.



Kolem nuly je graf funkce svislý  $\Rightarrow$  mělo by platit  $f'(0) = +\infty$  (v okolí nuly je funkce rostoucí a tedy s kladnou derivací).

Dosadíme do vzorce:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{0 + \Delta x} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty$$

Předchozí derivace je příkladem nevlastní derivace funkce v bodě.

Stejně jako u spojitosti můžeme definovat jednostranné derivace funkce v bodě:

**Nechť funkce  $f$  je definována v jistém levém, resp. pravém okolí bodu  $x_0$ .**

- **Existuje-li**  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  **nazýváme ji derivací funkce  $f$  v bodě  $x_0$  zleva.**
- **Existuje-li**  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  **nazýváme ji derivací funkce  $f$  v bodě  $x_0$  zprava.**

Podobně jako u spojitosti definujeme derivace v intervalu:

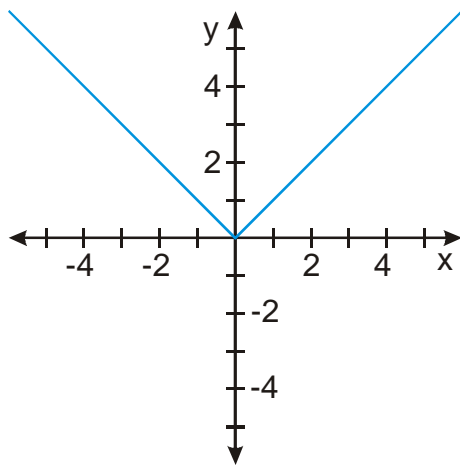
**Funkce  $f$  má v intervalu  $(a; b)$  derivaci, jestliže má derivaci v každém bodě  $x \in (a; b)$ .**

**Funkce  $f$  má v intervalu  $\langle a; b \rangle$  derivaci, jestliže má derivaci v každém bodě  $x \in (a; b)$  a v bodě  $a$  má derivaci zprava a v bodě  $b$  má derivaci zleva.**

Existence derivace souvisí se spojitostí funkce:

**Má-li funkce  $f$  v bodě  $x_0$  derivaci, je v tomto bodě spojitá.**

**Př. 5:** Na obrázku grafu funkce  $y = |x|$  demonstřuj, že neplatí věta: „Je-li funkce  $f$  v bodě  $x_0$  spojitá, má v tomto bodě derivaci“ (obrácená k větě předcházející).

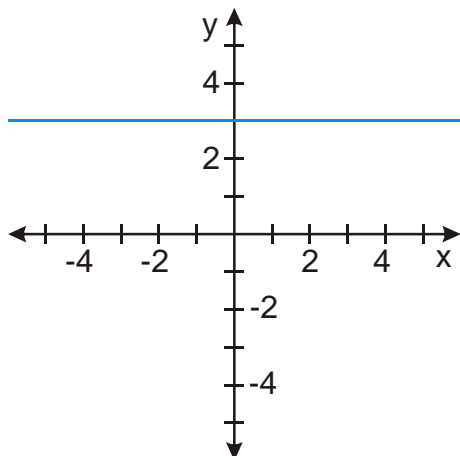


Neplatnost věty vyplývá ze situace v okolí bodu 0. V bodě 0 je funkce spojitá, ale nemá derivaci, protože sklon z obou stran je různý a jednostranné derivace se sobě nerovnjají.

Ted' začneme hledat vzorce pro derivace jednotlivých funkcí.

**Pedagogická poznámka:** Největší problém ve všech následujících příkladech nedělá studentům dosazení do limity pro derivaci nebo její výpočet, ale dosazení do předpisu funkce a výpočet výrazů  $f(x_0 + \Delta x)$  a  $f(x_0)$ .

**Př. 6:** Nakresli graf libovolné konstantní funkce  $y = c$ . Podle grafu odhadni funkci, která je její derivací. Urči tuto funkci pomocí vzorce pro výpočet derivace v bodě.



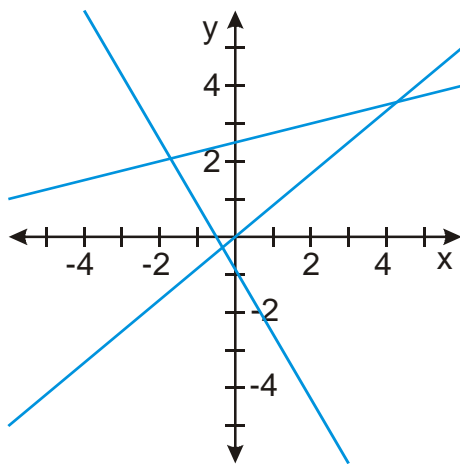
Hodnoty funkce se nemění  $\Rightarrow$  derivace by měla být nulová (funkce  $y = 0$ )

$$f(x_0 + \Delta x) = c$$

$$f(x_0) = c$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

**Př. 7:** Nakresli graf několika různých lineárních funkcí  $y = ax + b$ . Podle grafu odhadni jaké vlastnosti musí mít funkce, která je její derivací. Urči tuto funkci pomocí vzorce pro výpočet derivace v bodě.



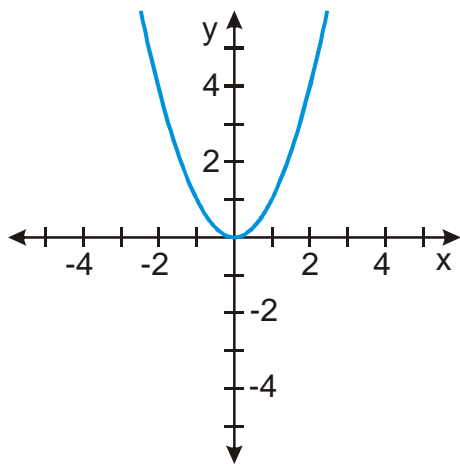
Hodnoty funkce se mění, změna závisí na parametru  $a$  (určuje sklon přímky)  $\Rightarrow$  derivace by měla záviset na  $a$  a neměla by záviset na  $x$  (sklon přímky je všude stejný)

$$f(x_0) = ax_0 + b$$

$$f(x_0 + \Delta x) = a(x_0 + \Delta x) + b$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + \Delta x) + b - (ax_0 + b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a$$

**Př. 8:** Nakresli graf kvadratické funkce  $y = x^2$ . Podle grafu odhadni jaké vlastnosti musí mít funkce, která je její derivací. Urči tuto funkci pomocí vzorce pro výpočet derivace v bodě.



Pro záporná  $x$  hodnoty funkce klesají ( $\Rightarrow$  záporné hodnoty derivace)

Pro kladná  $x$  hodnoty funkce rostou ( $\Rightarrow$  kladné hodnoty derivace)

$\Rightarrow$  derivace se mění a měla by být závislá na bodě  $x_0$

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2$$

$$f(x_0) = x_0^2$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x_0 + \Delta x = 2x_0$$

$\Rightarrow$  derivací funkce  $y = x^2$  je funkce  $y = 2x$

**Př. 9:** Petáková:

strana 155/cvičení 17  $f_3, f_8, f_{10}$

strana 155/cvičení 17  $g_2, f_8$

**Shrnutí:**