

## 10.2.1 Přírůstek argumentu, přírůstek funkce

### Předpoklady:

**Pedagogická poznámka:** Hodiny má jediný cíl – připravit vše na co nejsnazší vysvětlení derivace v dalších hodinách. Proto je v celé hodině používám přesně stejný způsob zápisu i výpočtu jako v následujících hodinách.

Hlavním cílem celé kapitoly je studium derivace – matematické aparátu pro zachycení změn funkčních závislostí.

Máme funkci:  $y = f(x)$ . Tato funkce vyrábí z hodnot proměnné  $x$  hodnoty proměnné  $y$ .

Proměnná  $x$  (ze které vycházíme) se nazývá **argument funkce**. O proměnné  $y$  pak říkáme, že je **funkcí argumentu  $x$** .

O přírůstcích (změnách) jsme už mluvili ve fyzice. Například ve slavném vzorci  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

vystupují dva:  $\Delta s$  a  $\Delta t$ :

- $\Delta s$  = změna dráhy, říká, jak se dráha změnila  $\Rightarrow \Delta s = s_2 - s_1$
- $\Delta t$  = změna času, říká, jak se změnil čas  $\Rightarrow \Delta t = t_2 - t_1$

Stejným způsobem je možné přírůstek definovat pro libovolnou veličinu.

**Př. 1:** Urči změny následujících veličin:

- a) auto zrychlilo z 50 km/h na 90 km/h
- b) průměrná známka z matematiky vzrostla z 2,26 na 2,83
- c) účastník kursu zhubnul za dva měsíce z 112 kg na 101 kg

a) auto zrychlilo z 50 km/h na 90 km/h

$$\Delta v = v_2 - v_1 = 90 - 50 \text{ km/h} = 40 \text{ km/h}$$

b) průměrná známka z matematiky vzrostla z 2,26 na 2,83

$$\Delta n = n_2 - n_1 = 2,83 - 2,26 = 0,57$$

c) účastník kursu zhubnul za dva měsíce z 112 kg na 101 kg

$$\Delta m = m_2 - m_1 = 101 - 112 \text{ kg} = -11 \text{ kg}$$

V matematice se většinou používá trošku jiné značení:

- místo počáteční hodnoty  $x_1$  píšeme  $x_0$
- místo konečné hodnoty  $x_2$  píšeme  $x$

$\Rightarrow$  **přírůstek argumentu**  $\Delta x = x - x_0$

**Definice:**

Nechť funkce  $f$  je definována na nějakém okolí  $\mathbf{U}_\delta(x_0)$  a nechť  $x \in \mathbf{U}_\delta(x_0)$ . Rozdíl  $x - x_0$  nazýváme přírůstek argumentu v bodě  $x_0$  a označujeme  $\Delta x = x - x_0$ .

analogicky můžeme psát **přírůstek funkce** (funkční hodnoty):

- místo počáteční funkční hodnoty  $y_1 = f(x_1)$  píšeme  $y_0 = f(x_0)$

- místo konečné hodnoty  $y_2 = f(x_2)$  píšeme  $y = f(x)$

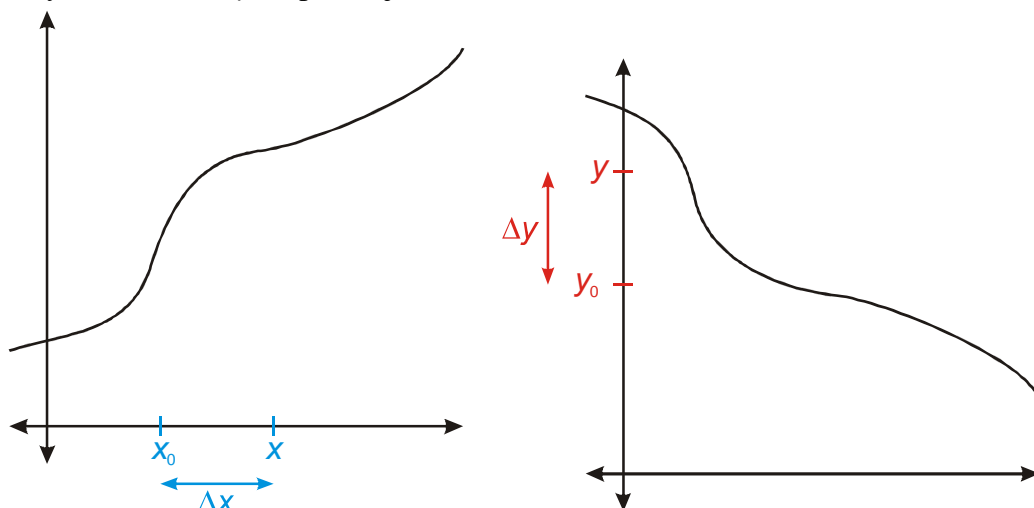
$\Rightarrow$  **přírůstek funkce**  $\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0)$

**Definice:**

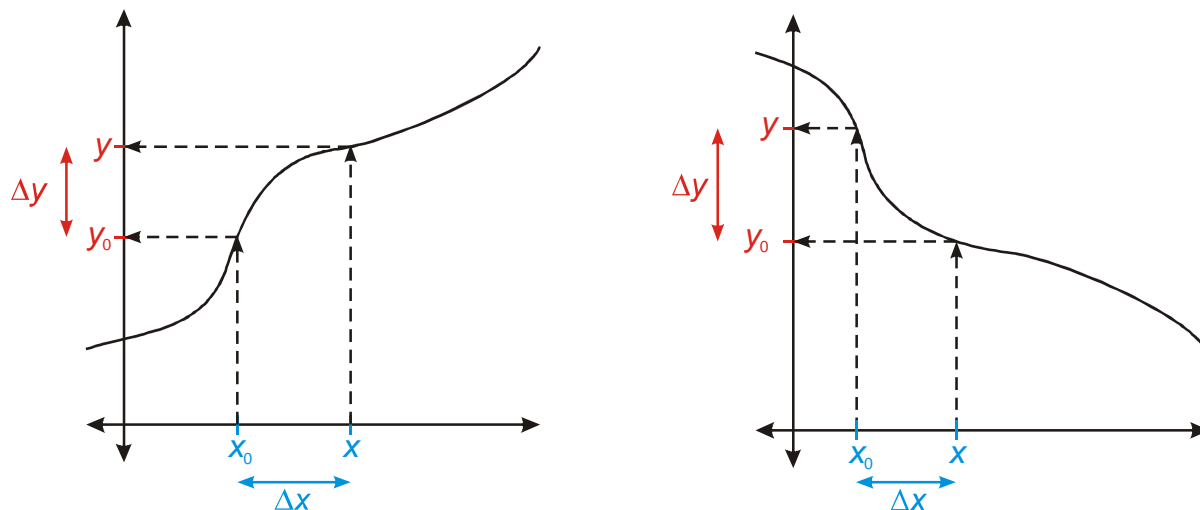
Nechť funkce  $f$  je definována na nějakém okolí  $\mathbf{U}_\delta(x_0)$  a necht'  $x \in \mathbf{U}_\delta(x_0)$ . Rozdíl  $f(x) - f(x_0)$  nazýváme přírůstek funkce v bodě  $x_0$  odpovídající přírůstku  $\Delta x = x - x_0$  argumentu a označujeme  $\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0)$ .

Protože bod  $x$  můžeme vyjádřit pomocí přírůstku argumentu takto:  $x = x_0 + \Delta x$ , píšeme většinou místo  $y = f(x) = f(x_0 + \Delta x)$ , pro přírůstek pak  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ .

**Př. 2:** Dokresli do obrázku, k vyznačenému  $\Delta x$  odpovídající  $\Delta y$  a obráceně k vyznačenému  $\Delta y$  odpovídající  $\Delta x$ .



Stačí nakreslit do obrázku funkční hodnoty bodů  $x_0$  a  $x$  (vlevo), případně najít vzory bodů  $y_0$  a  $y$  (vpravo).



**Př. 3:** Jaké podmínku musí splňovat funkce  $y = f(x)$ , aby platilo, že kladnému přírůstku argumentu  $\Delta x$  odpovídá kladný přírůstek funkce  $\Delta y$  ?

kladný přírůstek argumentu:  $\Delta x > 0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x > x_0$

kladný přírůstek funkce:  $\Delta y > 0 \Rightarrow y = y_0 + \Delta y > y_0$

$\Rightarrow$  pokud má funkce  $y = f(x)$  odpovídat kladnému přírůstku argumentu kladný přírůstek funkce musí funkce z většího hodnoty argumentu  $x$  vyrobit větší hodnotu  $y \Rightarrow$  funkce musí být rostoucí.

S přírůstky se dá také počítat:

Máme funkci  $y = x^2 + 1$ . Jaký je přírůstek této funkce v bodě 2 odpovídající přírůstku argumentu  $\Delta x = 1$  ?

$\Delta y = y - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \Rightarrow$  spočteme ve dvou krocích:

- $y_0 = f(x_0) = x_0^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$
- $y = f(x_0 + \Delta x) = x^2 + 1 = (x_0 + \Delta x)^2 + 1 = (2 + 1)^2 + 1 = 10$

$$\Delta y = y - y_0 = 10 - 5 = 5$$

Výsledek můžeme spočítat i obecně a pak dosadit:

$$y_0 = f(x_0) = x_0^2 + 1$$

$$y = f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 + 1$$

$$\begin{aligned} \Delta y = y - y_0 &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = \\ &= 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Dosazení: } \Delta y = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2 = 5$$

**Př. 4:** Vyjádři přírůstek funkce  $y = 2x + 1$  obecně. Poté dosad' do vypočteného výrazu tak, aby si určil konkrétní hodnoty v bodech 10, -3 odpovídající přírůstku argumentu  $\Delta x = 2$ .

$$y_0 = f(x_0) = 2x_0 + 1$$

$$y = f(x_0 + \Delta x) = 2(x_0 + \Delta x) + 1$$

$$\Delta y = y - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2(x_0 + \Delta x) + 1 - [2x_0 + 1] = 2x_0 + 2\Delta x + 1 - 2x_0 - 1 = 2\Delta x$$

Zajímavé. Výsledek neobsahuje bod, ve kterém máme přírůstek zjistit.

$$\text{Dosazení: } \Delta y = 2\Delta x = 2 \cdot 2 = 4$$

Přírůstek funkce  $y = 2x + 1$  se při přírůstku argumentu  $\Delta x = 2$  rovná 4 v každém bodě.

**Př. 5:** Vyjádři přírůstek funkce  $y = 2x + 1$  v bodech 10, -3 odpovídající přírůstku argumentu  $\Delta x = 2$  okamžitým dosazením.

bod 10

$\Delta y = y - y_0 \Rightarrow$  spočteme ve dvou krocích:

- $y_0 = 2x_0 + 1 = 2 \cdot 10 + 1 = 21$

- $y = 2x + 1 = 2(x + \Delta x) + 1 = 2(10 + 2) + 1 = 25$

$$\Delta y = y - y_0 = 25 - 21 = 4$$

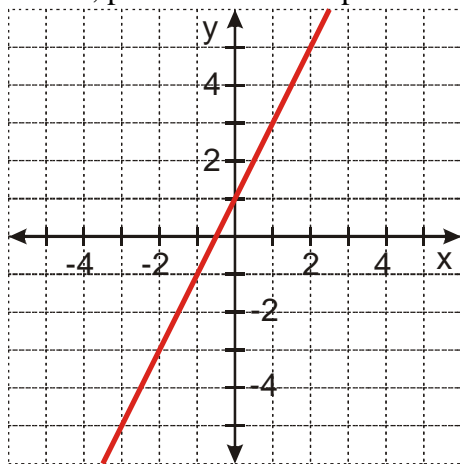
bod -3

$\Delta y = y - y_0 \Rightarrow$  spočteme ve dvou krocích:

- $y_0 = 2x_0 + 1 = 2 \cdot (-3) + 1 = -5$
- $y = 2x + 1 = 2(x + \Delta x) + 1 = 2(-3 + 2) + 1 = -1$

$$\Delta y = y - y_0 = -1 - (-5) = 4$$

Na první pohled je u předchozího příkladu zajímavé, že přírůstek funkce nezávisí na bodě, ve kterém ho počítáme. Na druhý pohled je zřejmé, že to tak být musí. Funkce  $y = 2x + 1$  je lineární, ve všech bodech roste stejně rychle a tak je úplně jedno, kde zjišťujeme přírůstek funkce, protože ten záleží pouze na přírůstku argumentu a směrnici přímky.



**Př. 6:** Vyjádři přírůstek funkce  $y = x^2$  v bodě  $x_0$  odpovídající přírůstku argumentu  $\Delta x$ .

Můžeme postupovat pouze druhým obecným způsobem:

$$\Delta y = y - y_0 = x^2 - x_0^2 = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$$

Stejný výsledek jako při počítání u funkce  $y = x^2 + 1$ .

**Shrnutí:**  $\Delta y = y - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$