

10.1.10 Výpočty limit I

Předpoklady: 10107

Už umíme limity rozeznat z grafů (a nakreslit odpovídající grafy) a definovat. Ještě se musíme naučit limity zjišťovat (počítat).

Kolik je $\lim_{x \rightarrow 3} 2x - 3$?

Jednoduché: funkce $y = 2x - 3$ je spojitá v každém bodě \Rightarrow v každém bodě se její limita musí rovnat funkční hodnotě $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} 2x - 3 = 2 \cdot 3 - 3 = 3$

Př. 1: Urči limity:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} 2^x - 2$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+1}$ c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+2}$ d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin x$
e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

a) $\lim_{x \rightarrow -2} 2^x - 2$

funkce $y = 2^x - 2$ je spojitá v $R \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} 2^x - 2 = 2^{-2} - 2 = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+1}$

funkce $y = \frac{x-1}{x+1}$ je spojitá v $R - \{-1\}$ (v -1 limitu naštěstí počítat nemusíme) \Rightarrow

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+2}$

funkce $y = \frac{x^2-1}{x+2}$ je spojitá v $R - \{-2\}$ (v -2 limitu naštěstí počítat nemusíme) \Rightarrow

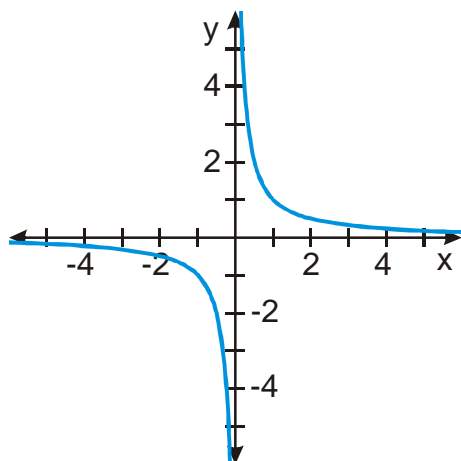
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+2} = \frac{(-1)^2-1}{-1+2} = \frac{0}{1} = 0$$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin x$

funkce $y = \sin x$ je spojitá v $R \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin x = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

funkce $y = \frac{1}{x}$ je spojitá v $R - \{0\}$, bohužel právě v 0 máme limitu určit \Rightarrow nemůžeme použít funkční hodnotu (ta dokonce ani neexistuje) \Rightarrow graf funkce

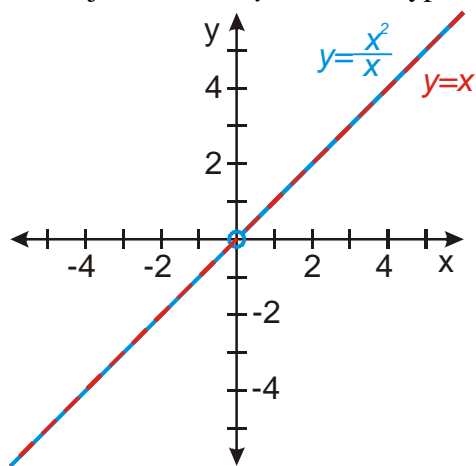


\Rightarrow když se x blíží k nule, směřují hodnoty z každé strany jinam $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ neexistuje

Jak je to s $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}$?

Na první pohled stejně jako s $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$: funkce $y = \frac{x^2}{x}$ není pro $x = 0$ definována (dělení 0).

Rozdíl: předpis $y = \frac{x^2}{x}$ můžeme upravit: $y = \frac{x^2}{x} = x \Rightarrow$ funkce $y = \frac{x^2}{x}$ se pro všechna $x \neq 0$ chová jako funkce $y = x$. Jak vypadá obrázek?



Hodnoty funkce $y = \frac{x^2}{x}$ jsou pro všechna $x \neq 0$ stejné jako pro funkci $y = x$. Na chování

funkce přímo v bodě, kde limitu určujeme, ale vůbec nezáleží $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

Předchozí úvahu zachycuje věta o limitě dvou funkcí:

Jestliže pro všechna $x \neq a$ z jistého okolí bodu a platí $f(x) = g(x)$ a současně

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$, potom má v bodě a limitu i funkce f a platí $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

Př. 2: Urči limity funkcí:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x}{x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x-3} = \frac{-1-1}{-1-3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x-2} = \frac{3+2}{3-2} = 5$$

U všech předchozích příkladů nejde o nic jiného než o rozklad na součiny. Situaci navíc zjednodušuje číslo a , ke kterému se blíží x – víme, že se objeví v rozkladech.

Někdy si závorku na zkrácení musíme „vyrobit“.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x}+2 = \sqrt{4}+2 = 4$$

Př. 3: Urči limity funkcí:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)}{(x+2)-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x+2}+1 = \sqrt{-1+2}+1 = 2$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{(x+4)-4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+4}+2 = \sqrt{0+4}+2 = 4$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16} \cdot \frac{1+\sqrt{x-3}}{1+\sqrt{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1-(x-3)}{(x^2-16)(1+\sqrt{x-3})} =$$

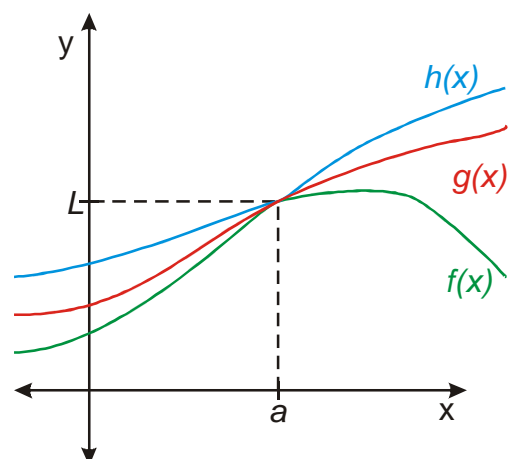
$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{(x+4)(x-4)(1+\sqrt{x-3})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-1}{(x+4)(1+\sqrt{x-3})} = \frac{-1}{(4+4)(1+\sqrt{4-3})} = -\frac{1}{16}$$

Věta o třech limitách:

Jestliže pro všechna $x \neq a$ z jistého okolí bodu a platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ a současně

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, potom existuje také limita funkce g v bodě a a platí $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$

Př. 4: Nakresli obrázek situaci, kterou popisuje předchozí věta.



Funkce $g(x)$ je sevřena mezi funkce $f(x)$ a $h(x) \Rightarrow$ pokud se obě tyto funkce blíží v okolí bodu a ke stejné limitě, musí se k této limitě blížit i funkce $g(x)$

Pomocí předchozí věty je možné dokázat důležitou limitu: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Velké množství

limit, které obsahují goniometrické funkce, se řeší převedením na $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Věta o počítání s limitami:

Jestliže $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, potom platí:

- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A + B$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A - B$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$
- $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}$ za předpokladu, že platí $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

S předchozí větou se již dá ledacos vypočítat:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos 0} \cdot 1 = 1$$

Pedagogická poznámka: Problémem u výpočtu limit, které obsahují goniometrické funkce je znalost vzorců. Buď potřebné vzorce napíšeme na tabuli nebo studentům rozdám tabulky, aby se hodina místo počítání limit nezvrhla na hledání vzorců.

Př. 5: Urči limity:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x}{3x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x} \right)$

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 2 \cdot 1 = 2$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sin^2 x) - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = -1 \cdot 1 = -1$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

Netriviální limity můžeme počítat i v jiných bodech než nula.

Př. 6: Urči limity:

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\sin x - \cos x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cdot \cos x}{1 + \cos 2x}$

a)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cdot \cos x}{1 + \cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos x}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x + (1 - \sin^2 x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x + \cos^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cdot \cos^2 x}{2 \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1 \end{aligned}$$

Př. 7: Petáková:

strana 152/cvičení 3 b) c) d) f)

strana 152/cvičení 4 a)

strana 153/cvičení 6 c) f) g) i)

strana 153/cvičení 7 b) d) g)

strana 153/cvičení 8 b)

strana 153/cvičení 9 e) g)

strana 154/cvičení 10 b) d)

Shrnutí: