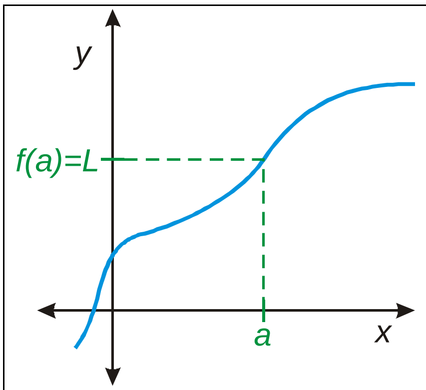
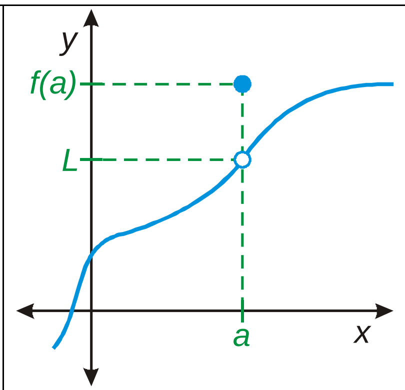
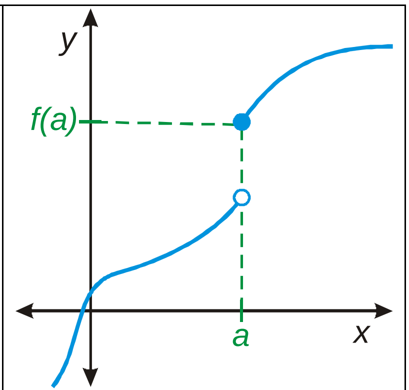
10.1.8 Definice limit I

Předpoklady: 10106

Pedagogická poznámka: Na úvod je třeba upozornit, že tato hodina je ze strany studentů snad nejvíce sabotovanou látkou za celé studium (podle reakcí 4B2009). Jejich ochota brát na vědomí smysl vět, které si píší, je mizivá a k řešení příkladů je nutné je víceméně nutit. Všichni mají plno řečí o „strašně těžké, nepochopitelné látce“ a tom, že „jsou moc hloupí a vůbec neví“. Přesto mé zkušenosti ukazují, že počet studentů, kteří nedokážou definice samostatně sestavovat je mizivý. Jenom se jim nechce.
Z předchozího je zřejmé, že pokud jim budete definice diktovat, zbytečně plýtváte časem, protože kromě matematických olympioniků vás nikdo neposlouchá (lze snadno ověřit například úmyslnou chybou). To už je lepší rozdat studentům definice vytištěné na papíře.

Př. 1: Nakresli vedle sebe tři obrázky funkcí:
a) funkce spojitá v bodě *a* b) funkce nespojitá v bodě *a*, s limitou v bodě *a*
c) funkce je v bodě *a* nespojitá, bez limity v bodě *a*
U funkcí, které mají limitu, vyznač limitu na ose *y*. Jaký je rozdíl mezi požadavky na existenci limity a požadavky na spojitostí funkce?

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>hodnota $f(a)$ může být jakákoliv a limita se nezmění</td>
<td>funkce směřuje v bodě a z obou stran k jiné hodnotě
$\Rightarrow$ nemá limitu</td>
</tr>
</table>

Spojitost klade na funkci větší požadavky, funkce se musí blížit k číslu, které je její funkční hodnotou. Limita vůbec nezávisí na hodnotě funkce v zkoumaném bodě.

$\Rightarrow$ definice spojitosti v bodě:

Funkce *f* je spojitá v bodě *a*, jestliže k libovolně zvolenému ε-okolí bodu $f(a)$, existuje takové δ-okolí bodu *a*, že pro všechna *x* z tohoto okolí bodu *a* patří hodnoty $f(x)$ do zvoleného okolí bodu $f(a)$.

Vyjádření pomocí nerovnic s absolutní hodnotou:

Funkce *f* je spojitá v bodě *a*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna reálná *x* platí: je-li $|x-a| < \delta$, pak $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Př. 2: Prostuduj obě verze definice spojitosti v bodě. Co budeme muset na definicích změnit, aby se z nich staly definice limity?

musíme změnit:
nezáleží na situaci v bodě a $\Rightarrow$ mezi x, které budeme vybírat z okolí bodu a nesmí být samotný bod a $\Rightarrow$ použijeme pouze redukované okolí bodu a (nebo podmínku $x \neq a$)
nemusí existovat hodnota $f(a)$ $\Rightarrow$ okolí na ose y, do kterého se při zobrazování musíme trefit, vybudujeme kolem limity L

Př. 3: Sestav podle obou předchozích definic pro spojitost odpovídající definice limity funkce.

$\Rightarrow$ definice limity v bodě:

Funkce f má v bodě a limitu L , jestliže k libovolně zvolenému ε-okolí bodu L, existuje takové δ-okolí bodu a, že pro všechna x z tohoto okolí bodu a, $x \neq a$ patří hodnoty $f(x)$ do zvoleného ε-okolí bodu L.

Vyjádření pomocí nerovnic s absolutní hodnotou:

Funkce f má v bodě a limitu L, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna reálná x platí: je-li $0 < |x-a| < \delta$, pak $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Př. 4: (BONUS) Zapiš definici limity pomocí zkráceného zápisu matematickou symbolikou.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in R : \left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\right)$$

Pro limity funkce v bodě platí následující dvě věty:

- **Funkce má v bodě *a* nejvýše jednu limitu.**
- **Funkce *f* je spojitá v bodě *a*, právě když** $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$**.**

Obě věty jsou z našich obrázku zřejmé, ale přesto vyžadují exaktní matematický důkaz.

Př. 5: (BONUS) Dokaž sporem větu, že funkce má v bodě a nejvýše jednu limitu.

Spor $\Rightarrow$ předpokládáme opak = funkce má v bodě a dvě limity $L_1 \neq L_2$.

Poloměr okolí na ose y volíme libovolně $\Rightarrow$ $\varepsilon = \frac{1}{2}|L_1 - L_2| \Leftrightarrow 2\varepsilon = |L_1 - L_2|$

Z definice vyplývá (pro okolí na ose x):

- existuje $\delta_1 > 0$ takové, že je-li $0 < |x-a| < \delta_1$, pak $|f(x) - L_1| < \varepsilon$
- existuje $\delta_2 > 0$ takové, že je-li $0 < |x-a| < \delta_2$, pak $|f(x) - L_2| < \varepsilon$

Zvolíme x uvnitř menšího z obou okolí bodu a: $\Rightarrow$ $0 < |x-a| < \min(\delta_1, \delta_2)$ $\Rightarrow$ tyto x by se měly vejít do okolí obou limit

$$|L_1 - L_2| = \left| L_1 \underbrace{- f(x) + f(x)}_{0} - L_2 \right| = \left| \left[L_1 - f(x) \right] + \left[f(x) - L_2 \right] \right| =$$

$$= |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| = \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$\Rightarrow$ $|L_1 - L_2| = 2\varepsilon$ což je spor s původním předpokladem $2\varepsilon = |L_1 - L_2|$

Př. 6: (BONUS) Dokaž přímých důkazem větu o souvislosti spojitosti a limity.

Věta má tvar ekvivalence $p \Leftrightarrow q$ $\Rightarrow$ musíme ji dokázat oběma směry:

$p \Rightarrow q$: Je-li funkce *f* je spojitá v bodě *a*, pak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

vycházíme ze spojitosti a máme dokázat limitu

máme spojitost: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in R: \left(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \right)$

chceme limitu: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in R: \left(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \right)$

stačí zapsat $L = f(x)$ a přidat omezující podmínku $0 < |x - a|$ a první řádka se změní v druhou $\Rightarrow$ je-li splněna první řádka je splněna i druhá $\Rightarrow$ $p \Rightarrow q$ platí

$q \Rightarrow p$: Je-li $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, pak je funkce *f* je spojitá v bodě *a*.

vycházíme z limity a máme dokázat spojitost

máme limitu: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in R: \left(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \right)$

chceme spojitost: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in R: \left(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \right)$

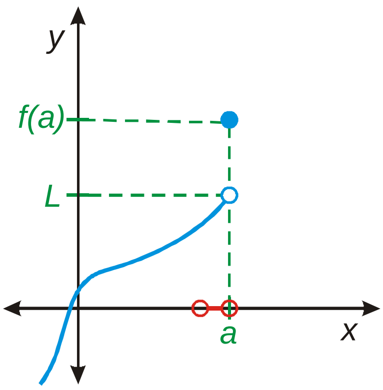
$\Rightarrow$ víme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L = f(a)$ dopíšeme ji do definice ve výchozím řádku

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in R: \left(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \right)$

zbývá zajistit, aby podmínka $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ platila i pro $f(a)$ (o hodnotě v *a* limita nic neříká), ale to je jasné pro $x = a$ platí $f(x) = f(a) \Rightarrow f(x) - f(a) = f(a) - f(a) = 0$ $\Rightarrow$ obraz bodu *a* leží také v okolí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Dokázáno

Př. 7: Nakresli obrázky a sestav definici (v obou verzích) jednostranné limity zleva ve vlastním bodě.



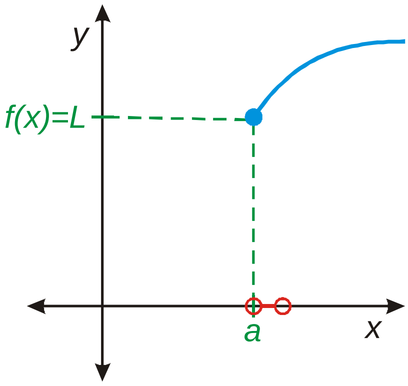
Funkce nemusí být napravo od bodu *a* (dokonce ani přímo v bodu *a*) definována $\Rightarrow$ *x*, která se budeme snažit zobrazit do ε-okolí kolem limity musíme vybírat pouze nalevo od bodu *a* $\Rightarrow$ zobrazujeme pouze z levého okolí bodu *a* (vše ostatní zůstává stejné)

Funkce *f* má v bodě *a* limitu *L* zleva, jestliže k libovolně zvolenému ε-okolí bodu *L*, existuje takové levé δ-okolí bodu *a*, že pro všechna *x* z tohoto okolí bodu *a*, $x \neq a$ patří hodnoty $f(x)$ do zvoleného ε-okolí bodu *L*.

Přes nerovnosti:

Funkce *f* má v bodě *a* limitu *L* zleva, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna reálná *x* platí: je-li $a - \delta < x < a$, pak $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Př. 8: Nakresli obrázky a sestav definici (v obou verzích) jednostranné limity zprava ve vlastním bodě.



Funkce nemusí být nalevo od bodu *a* (dokonce ani přímo v bodu *a*) definována $\Rightarrow$ *x*, která se budeme snažit zobrazit do ε-okolí kolem limity musíme vybírat pouze napravo od bodu *a* $\Rightarrow$ zobrazujeme pouze z pravého okolí bodu *a* (vše ostatní zůstává stejné)

Funkce *f* má v bodě *a* limitu *L* zprava, jestliže k libovolně zvolenému ε-okolí bodu *L*, existuje takové pravé δ-okolí bodu *a*, že pro všechna *x* z tohoto okolí bodu *a*, $x \neq a$ patří hodnoty $f(x)$ do zvoleného ε-okolí bodu *L*.

Přes nerovnosti:

Funkce *f* má v bodě *a* limitu *L* zprava, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna reálná *x* platí: je-li $0 < x < a + \delta$, pak $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Př. 9: Najdi vztah mezi existencí jednostranných limit funkce v bodě a existencí limit.

Když existují obě jednostranné limity a jsou stejné, tak se funkce v bodě *a* blíží z obou stran ke stejnému číslu a má tedy limitu.

Limita funkce *f* v bodě *a* existuje , právě když existují v bodě *a* limity zprava a zleva a jsou si rovny. Potom se limita funkce *f* v bodě *a* rovná společné hodnotě limit zprava a zleva.

Shrnutí: Definice limit jsou velmi podobné definicím spojitosti. Vynecháváme pouze zobrazování bodu *a*.