

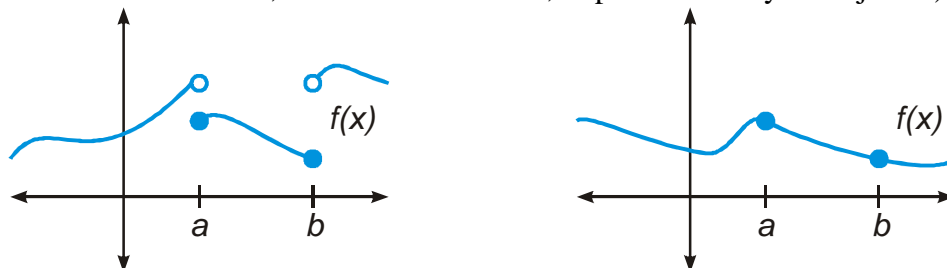
10.1.7 Větu o spojitosti a jejich užití

Předpoklady: 2706, 2718, 10106

Pedagogická poznámka: Při probírání této hodiny je třeba mít na paměti, že všechny věty, které studentům sdělujete z jejich pohledu neuvěřitelně složitě sdělují naprosto zřejmé a jasné věci. Snažím se studentům vysvětlit, že obtížnou matematickou prací v tomto případě nebylo si všimnout popisovaných vlastností funkcí, ale vytvořit celou matematickou stavbu pod nimi a nalezení důkazů.

Nejdůležitější věty o spojitosti jsou formulovány pro uzavřené intervaly $\langle a; b \rangle$ (tedy množiny $\langle a; b \rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$)

Takovou funkci si můžeme představit jako provázek, který držíme ve dvou rukou (provázek může v rukou končit, nebo může sahat dál, to pro naše účely nehraje roli)



Věta Weierstrassova:

Je-li funkce f spojitá v uzavřeném intervalu, existuje alespoň jeden takový bod $x_1 \in \langle a; b \rangle$, že pro všechna $x \in \langle a; b \rangle$ platí $f(x) \leq f(x_1)$, a alespoň jeden takový bod $x_2 \in \langle a; b \rangle$, že pro všechna $x \in \langle a; b \rangle$ platí $f(x) \geq f(x_2)$.

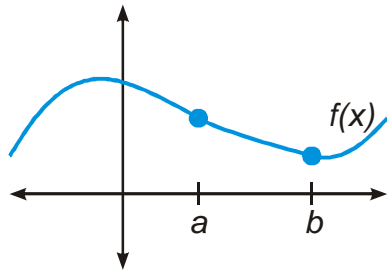
Co to vlastně znamená?

Věta má dvě části: nejdříve první: Je-li funkce f spojitá v uzavřeném intervalu, existuje alespoň jeden takový bod $x_1 \in \langle a; b \rangle$, že pro všechna $x \in \langle a; b \rangle$ platí $f(x) \leq f(x_1) \Rightarrow$ v intervalu $\langle a; b \rangle$ je zvláštní tím, že jeho hodnota $f(x_1)$ je větší (nebo rovna) hodnotám všech ostatních x z intervalu \Rightarrow spojitá funkce v uzavřeném intervalu nabývá alespoň v jednom bodě maxima

Druhá část věty: to samé, ale $f(x_2)$ je menší \Rightarrow spojitá funkce v uzavřeném intervalu nabývá alespoň v jednom bodě minima

logické – když máme provázek ve dvou rukou nemůže se přiblížit k nekonečnu, aniž by se přetrhl

Př. 1: Na obrázku je nakreslena funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a; b \rangle$. Urči čísla x_1 , x_2 zmiňovaná ve Weierstrassově větě.



číslo x_1 je číslo, jehož hodnota je v intervalu $\langle a; b \rangle$ maximální $\Rightarrow x_1 = a$

číslo x_2 je číslo, jehož hodnota je v intervalu $\langle a; b \rangle$ minimální $\Rightarrow x_2 = b$

Důsledek Weierstrassovy věty:

Funkce spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a; b \rangle$ je v tomto intervalu omezená.

Věta Bolzano-Weierstrassova

Je-li funkce f spojitá v $\langle a; b \rangle$ a $f(a) \neq f(b)$, potom, ke každému číslu K , které leží mezi čísly $f(a)$ a $f(b)$, existuje alespoň jeden takový bod $c \in (a; b)$, že $f(c) = K$.

\Rightarrow funkce spojitá v intervalu $\langle a; b \rangle$ nabývá všech hodnot mezi čísly $f(a)$ a $f(b)$.

logické: pokud provázek není přetržený, musí přejít přes všechny mezihodnoty

Darbouxova vlastnost spojitých funkcí:

Je-li funkce f spojitá v $\langle a; b \rangle$ a mají-li $f(a)$ a $f(b)$ různá znaménka, tj. $f(a) \cdot f(b) < 0$, potom existuje alespoň jeden takový bod $c \in (a; b)$, v němž platí $f(c) = 0$.

logické: jestliže mají $f(a)$ a $f(b)$ různá znaménka, je nula jednou z mezihodnot a funkce ji musí někde dosáhnout.

\Rightarrow

poslední vlastnost už jsme používali ve dvou případech (matematicky to nebylo legální, teprve teď by to bylo v pořádku)

1. Numerická metoda separace kořenů při řešení rovnic vyšších řádů

Hledáme řešení rovnice $x^3 - 2x + 5 = 0$.

Hodnoty levé strany nám přiblíží funkce $y = x^3 - 2x + 5$. Jak vypadá?

- pro velká záporná čísla jsou hodnoty záporné (kvůli zápornému výsledku třetí mocniny x)

- pro velká kladná čísla jsou hodnoty kladné (kvůli kladnému výsledku třetí mocniny x)

\Rightarrow graf funkce musí projít přes osu x (Darbouxova vlastnost spojitých funkcí). Místo, kde to udělá, je řešením rovnice.

Hledáme toto místo dosazováním:

dosadíme 0 $0^3 - 2 \cdot 0 + 5 = 5$

\Rightarrow kořen je záporné číslo

dosadíme -3 $(-3)^3 - 2 \cdot (-3) + 5 = -16 \Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-3; 0)$
 dosadíme -2 $(-2)^3 - 2 \cdot (-2) + 5 = 1 \Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-3; -2)$
 dosadíme -2,5 $(-2,5)^3 - 2 \cdot (-2,5) + 5 = -5,625 \Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-2,5; -2)$
 dosadíme -2,1 $(-2,1)^3 - 2 \cdot (-2,1) + 5 = -0,061 \Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-2,1; -2,0)$
 A tak bychom se dosazovali dál, dokud bychom nezjistili kořen s dostatečnou přesností.

Př. 2: Urči kořen rovnice $x^3 + x^2 - 1 = 0$ s přesností na dvě desetinná místa.

- pro velká záporná čísla jsou hodnoty záporné (kvůli zápornému výsledku třetí mocniny x)
 - pro velká kladná čísla jsou hodnoty kladné (kvůli kladnému výsledku třetí mocniny x)
 \Rightarrow graf funkce musí projít přes osu x (Darbouxova vlastnost spojitých funkcí). Místo, kde to udělá, je řešením rovnice.

Hledáme toto místo dosazováním:

dosadíme 0 $0^3 + 0^2 - 1 = -1 \Rightarrow$ kořen je kladné číslo
 dosadíme 1 $1^3 + 1^2 - 1 = 1 \Rightarrow$ kořen je v intervalu $(0; 1)$
 dosadíme 0,5 $(0,5)^3 + (0,5)^2 - 1 = -0,625 \Rightarrow$ kořen je v intervalu $(0,5; 1)$
 dosadíme 0,7 $(0,7)^3 + (0,7)^2 - 1 = -0,167 \Rightarrow$ kořen je v intervalu $(0,7; 1)$
 dosadíme 0,8 $(0,8)^3 + (0,8)^2 - 1 = 0,152 \Rightarrow$ kořen je v intervalu $(0,7; 0,8)$
 dosadíme 0,75 $(0,75)^3 + (0,75)^2 - 1 = -0,015625 \Rightarrow$ kořen je v intervalu $(0,75; 0,8)$
 dosadíme 0,76 $(0,76)^3 + (0,76)^2 - 1 = -0,016576 \Rightarrow$ kořen je v intervalu
 $(0,75; 0,76)$

2. Řešení nerovnic metodou nulových bodů

funkce může přejít z kladných do záporných hodnot pouze přes nulu nebo v místě, kde je přetržena \Rightarrow

- Zjistíme pro která x nejsou libovolné výrazy v nerovnici definované - výsledky nakreslíme na číselnou osu. **Našli jsme body přetržení.**
- Vyřešíme rovnici $f(x) = 0$ a výsledky přikreslíme na osu. **Našli jsme body přechodu přes osu x .**
- Na ose vznikly intervaly. **Z každého vzniklého intervalu dosadíme do nerovnice libovolné vhodné číslo.** Pokud pro něj nerovnice vyjde, vyjde i pro všechny další čísla v intervalu. Pokud nevyjde, tak nevyjde pro žádná čísla v tomto intervalu.
- **Nerovnice je vyřešena.**

Př. 3: Vyřeš nerovnici $x^3 \geq x$ metodou nulových bodů.

1. Zjistíme podmínky existence výrazů na obou stranách nerovnice

Obě strany nerovnice jsou definovány vždy.

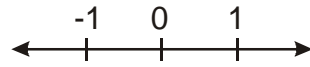
2. Hledáme řešení rovnice $x^3 = x$ (abychom objevili nulové body nerovnice), kde funkce přechází přes osu x .

$$x^3 = x$$

$$x^3 - x = 0 \quad \text{zkusíme levou stranu rozložit na součin:}$$

$$x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$$

Zakreslíme získané kořeny na osu: 

3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost

- interval $(-\infty; -1)$: například číslo -2
 $(-2)^3 \geq (-2) \Rightarrow -8 \geq -2 \Rightarrow$ neplatí
- interval $(-1; 0)$: například číslo $-0,1$
 $(-0,1)^3 \geq (-0,1) \Rightarrow -0,001 \geq -0,1 \Rightarrow$ platí
- interval $(0; 1)$: například číslo $0,1$
 $0,1^3 \geq 0,1 \Rightarrow 0,001 \geq 0,1 \Rightarrow$ neplatí
- interval $(1; \infty)$: například číslo 2
 $2^3 \geq 2 \Rightarrow 8 \geq 2 \Rightarrow$ platí

Protože řešená nerovnice má nerovnost \geq přidám k nalezenému intervalu ještě nulové body $\Rightarrow K = \langle -1; 0 \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle$

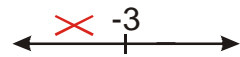
Př. 4: Vyřeš nerovnici $\sqrt{x+3} \geq x+1$ metodou nulových bodů.

1. Zjistíme podmínky existence výrazů na obou stranách nerovnice

levá strana: pod odmocninou musí být nezáporné číslo \Rightarrow

řešíme nerovnici $x+3 \geq 0$

$$x \geq -3$$



Nerovnici můžeme řešit pouze pro $x \in (-\infty; -3]$.

2. Hledáme řešení rovnice $\sqrt{x+3} = x+1$ (abychom objevili nulové body nerovnice, kde funkce přechází přes osu x).

$$\sqrt{x+3} = x+1 \quad /^2$$

$$(\sqrt{x+3})^2 = (x+1)^2$$

$$x+3 = x^2 + 2x+1$$

$$0 = x^2 + x - 2$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x_1 = -2, x_2 = 1$$

Zkouška:

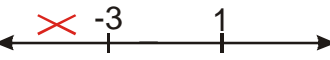
$$x_1 = -2 \quad L = \sqrt{x+3} = \sqrt{-2+3} = 1 \quad P = x+1 = -2+1 = -1$$

$$L \neq P$$

$$x_2 = 1 \quad L = \sqrt{x+3} = \sqrt{1+3} = 2 \quad P = x+1 = 1+1 = 2$$

$$L = P$$

\Rightarrow jediný kořen $x = 1$

Doplníme získané kořeny na osu: 

3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost

- interval $(-\infty; -3)$: pro tato x není definována odmocnina, nemusíme je zkoušet, určitě nejsou řešením.
- interval $(-3; 1)$: vybereme číslo například 0:

$$\sqrt{x+3} \geq x+1 \quad \sqrt{0+3} \geq 0+1$$

$$\sqrt{3} \geq 1 \text{ - platí } \Rightarrow \text{interval } (-3; 1) \text{ není řešením}$$
- interval $(2; \infty)$: vybereme číslo například 6 (kvůli odmocňování):

$$\sqrt{x+3} \geq x+1 \quad \sqrt{6+3} \geq 6+1$$

$$3 \geq 7 \text{ - neplatí } \Rightarrow \text{interval } (2; \infty) \text{ není řešením}$$

Protože řešená nerovnice má nerovnost \geq přidám k nalezenému intervalu ještě nulové body $\Rightarrow K = \langle -3; 1 \rangle$

Shrnutí: