10.1.5 Okolí bodu

Předpoklady: 2401

Pedagogická poznámka: Hodina zjevně překračuje možnosti většiny studentů v 45 minutách. Myslím, že nemá cenu přetahovat do další hodiny, příklady s redukovanými okolími nejsou nutné, je pouze potřeba, aby studenti pojem redukovaného okolí slyšeli a také aby se pokusili vyrobit závěrečnou přehlednou tabulku, která napomáhá zapamatování a odhaluje souvislosti.

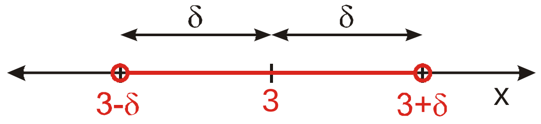
Co znamenají slova spojitost a limita víme, ale nedokážeme to matematicky exaktně popsat. Než se k tomu dostaneme, musíme se naučit pracovat s několika jednoduchými pojmy, které se v této části matematiky používají. Není na nich nic těžkého, jde pouze o to, abychom si je zažili a ony nám nečinily potíže ve chvílích, kdy budeme muset uvažovat o jiných problémech.

Jak u spojitosti, tak u limit jsme zkoumali, jak se hodnoty funkce mění, když se x blíží k nějaké hodnotě (třeba u $\lim_{x\to -2} f(x)$ když x se blíží 2), jinými slovy co se děje, když x je okolo bodu 2.

Definice:
Okolím bodu a (δ-okolím bodu a) se nazývá otevřený interval $(a-\delta; a+\delta)$, kde δ je libovolné kladné reálné číslo. Číslo a se nazývá střed okolí, číslo δ se nazývá poloměr okolí. δ-okolí bodu a značíme $\mathbf{U}_\delta(a)$.

Poznámka: Různá okolí bodu se neznačí v matematice jednotně. Klasická gymnazijní sada používá značení pomocí speciálního znaku podobného tiskacímu U bez indexu $\cup(a,\delta)$ nebo $\cup(a)$, v jiné literatuře se objevují například prokládaná písmena $\mathcal{U}_\delta(a)$. My se budeme držet (podobně jako v kombinatorice) využívaní indexu, abychom rozlišili rozdílný význam obou čísel pro okolí $\mathbf{U}_\delta(a)$: δ = poloměr, vzdálenost; a = střed okolí, hodnota proměnné. V poznámkách pod každou z definic pak zmíníme jiné druhy značení.

Př. 1: Na číselné ose nakresli libovolné δ-okolí čísla 3.



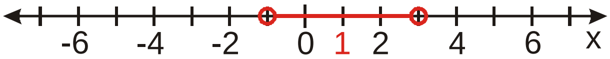
Vytvoříme libovolný otevřený interval se středem v bodě 3.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti mají problémy s tím, že není stanovena velikost okolí. Je dobré jim vysvětlit, že v případě, že osa není očíslována (pouze číslem 3), je úplně jedno jak okolí udělají velké.

Př. 2: Na číselné ose nakresli a zapiš intervalem:

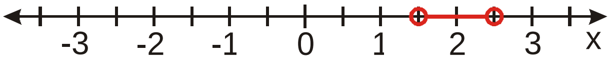
a) $\mathbf{U}_2(1)$ b) $\mathbf{U}_{0,5}(2)$ c) $\mathbf{U}_1(-3)$ d) $\mathbf{U}_{-0,5}(5)$

a) $\mathbf{U}_2(1)$ = okolí bodu 1 s poloměrem 2



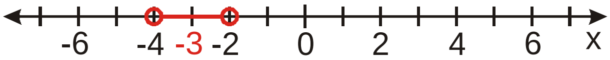
$\mathbf{U}_2(1) = (1-2;1+2) = (-1;3)$

b) $\mathbf{U}_{0,5}(2)$ = okolí bodu 2 s poloměrem 0,5



$\mathbf{U}_{0,5}(2) = (2-0,5;2+0,5) = (1,5;2,5)$

c) $\mathbf{U}_1(-3)$ = okolí bodu -3 s poloměrem 1



$\mathbf{U}_1(-3) = (-3-1;-3+1) = (-4;-2)$

d) $\mathbf{U}_{-0,5}(5)$ = nesmysl, bod 5 nemůže mít okolí s poloměrem –0,5

Př. 3: Zapiš řešení nerovnice $|x-2| < 0,5$ jako okolí bodu (rady: pro řešení nerovnice použij význam absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel, řešení si nakresli na číselnou osu).

Význam absolutní hodnoty z rozdílu dvou čísel: $|x-a|$ = vzdálenost obrazů čísel *x* a *a* na číselné ose

$\Rightarrow$ $|x-2| < 0,5$ hledáme čísla, která jsou od čísla 2 vzdálena méně než o 0,5 $\Rightarrow$

$K = (1,5;2,5) = \mathbf{U}_{0,5}(2)$

$\Rightarrow$ $\mathbf{U}_\delta(a)$ tvoří všechna reálná čísla *x*, která vyhovují nerovnostem: $a-\delta < x < a+\delta$, zkráceně zapsáno $|x-a| < \delta$.

Př. 4: Zapiš intervaly jako okolí bodu. Každé okolí pak vyjádři nerovnicí s absolutní hodnotou.

a) $(1,9;2,1)$ b) $(1;5)$ c) $(1;4)$ d) $\langle 2;4\rangle$ e) $(-3;1)$

a) $(1,9;2,1)$

střed intervalu = průměr krajních čísel: $\frac{1,9+2,1}{2} = 2$ $\Rightarrow$ poloměr okolí: $2,1-2 = 0,1$

$(1,9;2,1) = \mathbf{U}_{0,1}(2)$ $\Rightarrow$ $x \in R$, $|x-2| < 0,1$

b) $(1;5)$

střed intervalu = průměr krajních čísel: $\frac{1+5}{2}=3 \;\Rightarrow$ poloměr okolí: $5-3=2$

$(1;5)=\mathbf{U}_2(3) \;\Rightarrow\; x\in R,\ |x-3|<2$

c) $(1;4)$

střed intervalu = průměr krajních čísel: $\frac{1+4}{2}=2{,}5 \;\Rightarrow$ poloměr okolí: $4-2{,}5=1{,}5$

$(1;4)=\mathbf{U}_{1,5}(2{,}5) \;\Rightarrow\; x\in R,\ |x-2{,}5|<1{,}5$

d) $\left(2;4\right\rangle$ - nejde zapsat jako okolí bodu, nejde o otevřený interval

e) $(-3;1)$

střed intervalu = průměr krajních čísel: $\frac{-3+1}{2}=-1 \;\Rightarrow$ poloměr okolí: $1-(-1)=2$

$(-3;15)=\mathbf{U}_2(-1) \;\Rightarrow\; x\in R,\ |x-(-1)|=|x+1|<2$

Pedagogická poznámka: Protože v následujících hodinách budeme často zápisy pomocí nerovnice s absolutní hodnotou používat, trvám na tom, aby je studenti psali a tak si na ně zvykli.

Protože jsme v předchozích hodinách neurčovali pouze spojitost a limitu v bodě, ale i spojitost (limitu) zleva (případně zprava), nebude nám stačit pouze okolí bodu (jde na obě strany). Musíme si zavést i levé (pravé) okolí bodu.

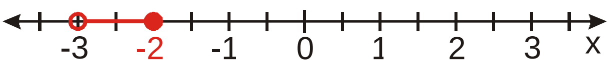
Př. 5: Zapiš definici levého (pravého) δ-okolí bodu *a* (pouze analogii první věty v definici okolí bodu).

Levým okolím bodu *a* (levým δ-okolím bodu *a*) se nazývá polouzavřený interval $\left(a-\delta;a\right\rangle$, kde δ je libovolné kladné reálné číslo. Levé δ-okolí bodu *a* značíme $\mathbf{U}_\delta^-(a)$.
Pravým okolím bodu *a* (pravým δ-okolím bodu *a*) se nazývá polouzavřený interval $\left\langle a;a+\delta\right)$, kde δ je libovolné kladné reálné číslo. Pravé δ-okolí bodu *a* značíme $\mathbf{U}_\delta^+(a)$.

Pomocí nerovností píšeme:
$\mathbf{U}_\delta^-(a)=\{x\in R; a-\delta<x\le a\}$
$\mathbf{U}_\delta^+(a)=\{x\in R; a\le x<a+\delta\}$

Př. 6: Na číselné ose nakresli, zapiš intervalem a pomocí nerovností:
a) $\mathbf{U}_1^-(-2)$ b) $\mathbf{U}_{0,5}^+(-2)$ c) $\mathbf{U}_{0,5}^+(0)$

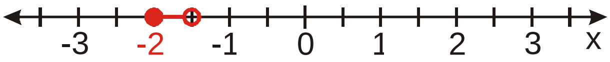
a) $\mathbf{U}_1^-(-2)$ = levé okolí bodu -2 s poloměrem 1



$\mathbf{U}_1^-(-2)=\left(-2-1;-2\right\rangle=\left(-3;-2\right\rangle$

$\mathbf{U}_1^-(-2)=\{x\in R; -3<x\le -2\}$

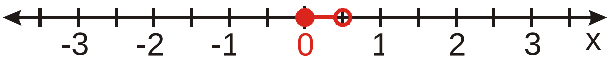
b) $\mathbf{U}_{0,5}^+(-2)$ = pravé okolí bodu -2 s poloměrem 0,5



$\mathbf{U}_{0,5}^+(-2)=\langle -2;-2+0,5)=\langle -2;-1,5)$

$\mathbf{U}_{0,5}^+(-2)=\{x\in R; -2\le x<-1,5\}$

c) $\mathbf{U}_{0,5}^+(0)$ = pravé okolí bodu 0 s poloměrem 0,5



$\mathbf{U}_{0,5}^+(0)=\langle 0;0+0,5)=\langle 0;0,5)$

$\mathbf{U}_{0,5}^+(0)=\{x\in R; 0\le x<0,5\}$

Př. 7: Zapiš intervaly jako okolí bodu:
a) $\langle 2;2,2)$ b) $(-2;1\rangle$ c) $\langle 0,997;1)$

a) $\langle 2;2,2)$

střed okolí: 2 $\Rightarrow$ poloměr okolí: $2,2-2=0,2$

$\langle 2;2,2)=\mathbf{U}_{0,2}^+(2)$

b) $(-2;1\rangle$

střed okolí: 1 $\Rightarrow$ poloměr okolí: $1-(-2)=3$

$(-2;1\rangle=\mathbf{U}_3^-(1)$

c) $\langle 0,997;1)$

střed okolí: $0,997$ $\Rightarrow$ poloměr okolí: $1-0,997=0,003$

$\langle 0,997;1)=\mathbf{U}_{0,003}^+(0,997)$

Při určování limit na hodnotě v bodě vůbec nezáleží $\Rightarrow$ z našich úvah ji tedy vynecháme a samotný bod, ve kterém limitu hledáme, budeme ignorovat $\Rightarrow$

Definice:
Redukovaným okolím bodu *a* (redukovaným δ-okolím bodu *a*) se nazývá množina $(a-\delta;a+\delta)-\{a\}$, kde δ je libovolné kladné reálné číslo. Číslo *a* se nazývá střed okolí, číslo δ se nazývá poloměr okolí. Redukované δ-okolí bodu *a* značíme $\mathbf{R}_\delta(a)$.

Poznámka: Ve značení redukovaných (prstencových) okolí je ještě větší zmatek než ve značení normálních okolí. Někdy se vychází ze značení normálního okolí přidáním indexu $U^{\oplus}(a,\delta)$ nebo $U^{\oplus}(a)$, jinde se používá jiné písmeno $\mathfrak{P}_\delta(a)$. My se budeme postupovat stejně jako u normálního okolí s tím, že zamění písmeno U písmenem R. Všechna ostatní pravidla budou pro oba druhy okolí stejná.

Př. 8: Přečti následujících označení, sestav jejich definice a zapiš je jako množiny:
a) $\mathbf{R}_\delta^+(a)$ b) $\mathbf{R}_\delta^-(a)$

a) $\mathbf{R}_\delta^+(a)$ = pravé redukované δ-okolí bodu *a*

Pravým redukovaným okolím bodu *a* (pravým redukovaným δ-okolím bodu *a*) se nazývá otevřený interval $(a;a+\delta)$, kde δ je libovolné kladné reálné číslo.

$\mathbf{R}_\delta^+(a)=\{x\in R; a<x<a+\delta\}$

b) $\mathbf{R}_\delta^-(a)$

Levým redukovaným okolím bodu *a* (levým redukovaným δ-okolím bodu *a*) se nazývá otevřený interval $(a-\delta;a)$, kde δ je libovolné kladné reálné číslo.

$\mathbf{R}_\delta^-(a)=\{x\in R; a-\delta<x<a\}$

Př. 9: Zapiš intervalem (sjednocením intervalů) a vyznač na ose:
a) $\mathbf{R}_{0,1}(1,5)$ b) $\mathbf{R}_{0,02}^+(1,42)$ c) $\mathbf{R}_2^-(-1)$

a) $\mathbf{R}_{0,1}(1,5)$ = redukované okolí bodu 1,5 s poloměrem 0,1

$\mathbf{R}_{0,1}(1,5)=(1,4;1,5)\cup(1,5;1,6)$

b) $\mathbf{R}_{0,02}^+(1,42)$ = pravé redukované okolí bodu 1,42 s poloměrem 0,02

$\mathbf{R}_{0,02}^+(1,42)=(1,42;1,42+0,02)=(1,42;1,44)$

c) $\mathbf{R}_2^-(-1)$ = levé redukované okolí bodu -1 s poloměrem 2

$\mathbf{R}_2^-(-1)=(-1-2;-1)=(-3;-1)$

Př. 10: Sestav přehled různých druhů okolí bodu.

Všechny druhy okolí můžeme zapsat do tabulky.

	oboustranné	levé	pravé
obsahuje střed	$\mathbf{U}_\delta(a)$	$\mathbf{U}_\delta^-(a)$	$\mathbf{U}_\delta^+(a)$
neobsahuje střed	$\mathbf{R}_\delta(a)$	$\mathbf{R}_\delta^-(a)$	$\mathbf{R}_\delta^+(a)$

Shrnutí: Čísla, která obklopují nějaké číslo, zapisujeme pomocí okolí – otevřených nebo polouzavřených intervalů.