9.2.7 Nezávislé jevy I

Předpoklady: 9204

Př. 1: Předpokládej, že pravděpodobnost narození chlapce je stejná jako pravděpodobnost narození dívky (a tedy v obou případech rovna 0,5) a není ovlivněna genetickými dispozicemi rodičů. Najdi množinu všech možných výsledků rození dětí v rodinách se třemi dětmi. Urči pravděpodobnosti následujících jevů:
a) Jev *A*: „nejstarší dítě je hoch“ b) Jev *B*: „prostřední dítě je dívka“
c) Jev *C*: „všechny tři děti jsou hoši“
Urči také pravděpodobnosti jevů $(A \cap B)$, $(A \cap C)$ a $(B \cap C)$. U každého průniku rozhodni, zda je v běžném smyslu možné považovat jevy, ze kterých je sestaven, za nezávislé.

Při sestavování množiny všech výsledků musíme zohlednit:
- potřebujeme znát pořadí dětí, kvůli určení pravděpodobností jevů *A* a *B*
- všechny výsledku by měly být stejně pravděpodobné (což neplatí pro výsledky „dvě dívky a jeden hoch“ a „tři hoši“)

$\Rightarrow$ množinou všech výsledků budou uspořádané trojice z písmen *h*, *d*, kde první místo znamená pohlaví prvního dítěte, druhé místo pohlaví druhého, třetí místo třetího.

$$\Omega = \{(h,h,h),(h,h,d),(h,d,h),(d,h,h),(h,d,d),(d,h,d),(d,d,h),(d,d,d)\}$$

a) Jev *A*: „nejstarší dítě je hoch“

$$A = \{(h,h,h),(h,h,d),(h,d,h),(h,d,d)\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

b) Jev *B*: „prostřední dítě je dívka“

$$B = \{(h,d,h),(h,d,d),(d,d,h),(d,d,d)\} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

c) Jev *C*: „všechny tři děti jsou hoši“

$$C = \{(h,h,h)\} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{8}$$

nezávislé jevy: jevy, které se neovlivňují

Jev $(A \cap B)$: „první dítě je hoch a prostřední je dívka“

$$A \cap B = \{(h,d,h),(h,d,d)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

jevy *A*, *B* jsou nezávislé, fakt, že se jako první narodí chlapec nemá vliv na pohlaví druhého dítěte

Jev $(A \cap C)$: „první dítě je hoch a všechny tři děti jsou hoši“

$$A \cap C = \{(h,h,h)\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{8}$$

jevy *A*, *C* nejsou nezávislé, protože se nemohou narodit tři hoši bez toho, aby první dítě byl hoch

Jev $(B \cap C)$: „prostřední dítě je dívka a všechny tři děti jsou hoši“

$$A \cap C = \varnothing \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{0}{8} = 0$$

jevy *B*, *C* nejsou nezávislé, protože když bude prostřední dítě dívka, nikdy se nenarodí ze tří dětí tři hoši

Pravděpodobnost, že „první dítě je hoch a druhé dítě je dívka“ můžeme určit i jinak. Přibližně polovina rodin má jako první dítě hocha a z této poloviny pak polovina rodin má jako druhé dítě dívku $\Rightarrow$ pravděpodobnost jevu $(A \cap B)$ je tedy: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Všimneme si význam jednotlivých členů: $\frac{1}{2} = P(A)$, $\frac{1}{2} = P(B)$, $\frac{1}{4} = P(A \cap B)$.

Zdá se, že platí vzorec: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Platí tento vzorec i pro jevy *A*, *C*? $P(A \cap C) = \frac{1}{8} \neq P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$

Podobně vzorec neplatí pro jevy *B*, *C*: $P(B \cap C) = 0 \neq P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$

Závěr: Zdá se, že pokud jsou dva jevy *A*, *B* nezávislé, pravděpodobnost $P(A \cap B)$ toho, že nastanou oba získáme jako součin pravděpodobností $P(A)$ a $P(B)$.

Ve skutečnosti je to ještě jinak. „Nemít vliv“ není matematický termín a tak nemůžeme tímto způsobem rozhodovat zda jsou dva jevy nezávislé. Rozhodnutí je pak možné učinit pouze na základě toho, zda vzorec $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ platí nebo ne. $\Rightarrow$ nejenže pro nezávislé jevy můžeme používat vzorec $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, ale dokonce platnost tohoto vzorce rozhoduje o tom, zda jevy jsou nebo nejsou nezávislé.

Řekneme, že jevy *A*, *B* jsou nezávislé jestliže platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Př. 2: Ve třetím ročníku gymnázia propadá ve čtvrtletí průměru 5% studentů z matematiky, 2% studentů z fyziky a 1% studentů z obou předmětů. Rozhodni, zda jsou jevy „student propadne z matematiky“ a „student propadne z fyziky“ nezávislé.

Uvedená procenta vezmeme jako pravděpodobnosti:
$P(M) = 0,05$, $P(F) = 0,02$, $P(M \cap F) = 0,01$
Dosadíme do vzorce: $P(M \cap F) = P(M) \cdot P(F)$
$0,01 \neq 0,05 \cdot 0,02 = 0,001$
Jevy „student propadne z matematiky“ a „student propadne z fyziky“ jsou závislé (což není nic překvapivého).

Př. 3: U náhodného pokusu z prvního příkladu rozhodni nejdříve odhadem, poté dosazením do vzorce, zda jsou nezávislé dvojice jevů,:
a) *D*: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, *E*: „třetí se narodí hoch“
b) *D*: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, *F*: „pohlaví prvního a třetího dítěte je stejné“
c) *D*: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, *G*: „pohlaví všech tří dětí je stejné“

Určíme potřebné pravděpodobnosti a dosadíme do vzorce

a) D: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, E: „třetí se narodí hoch“
jevy D a E jsou zřejmě nezávislé
jev D: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“

$$D = \{(h,h,h),(h,h,d),(d,d,h),(d,d,d)\} \Rightarrow P(D) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

jev E: „třetí se narodí hoch“

$$E = \{(h,h,h),(h,d,h),(d,h,h),(d,d,h)\} \Rightarrow P(E) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

jev $D \cap E$: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné a třetí se narodí hoch“

$$D \cap E = \{(h,h,h),(d,d,h)\} \Rightarrow P(D \cap E) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Vzorec: $P(D \cap E) = P(D) \cdot P(E) \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$ jevy D a E jsou nezávislé

b) D: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, F: „pohlaví prvního a třetího dítěte je stejné“
jevy D a F by mohly být nezávislé
jev F: „pohlaví prvního a třetího dítěte je stejné“

$$F = \{(h,h,h),(h,d,h),(d,h,d),(d,d,d)\} \Rightarrow P(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

jev $D \cap F$: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné a pohlaví prvního a třetího dítěte je stejné“

$$D \cap F = \{(h,h,h),(d,d,d)\} \Rightarrow P(D \cap F) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Vzorec: $P(D \cap F) = P(D) \cdot P(F) \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$ jevy D a F jsou nezávislé

c) D: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné“, G: „pohlaví všech tří dětí je stejné“
jevy jsou závislé, pokud není pohlaví prvních dvou dětí stejné, nemohou mít stejné pohlaví všechny tři děti
jev G: „pohlaví všech tří dětí je stejné“

$$G = \{(h,h,h),(d,d,d)\} \Rightarrow P(G) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

jev $D \cap G$: „pohlaví prvních dvou dětí je stejné a pohlaví všech tří dětí je stejné“

$$D \cap G = \{(h,h,h),(d,d,d)\} \Rightarrow P(D \cap G) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Vzorec: $P(D \cap G) = P(D) \cdot P(G) \Rightarrow \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow$ jevy D a G nejsou nezávislé

Dodatek: Podobně jako můžeme určit zda jsou nezávislé jevy A, B pomocí vzorce $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, můžeme rozhodnout i o nezávislosti tří jevů A, B, C.
Jevy A, B, C jsou nezávislé právě když, jsou nezávislé:
a) každé dva z nich ($\Rightarrow$ platí vzorce $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$ a $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$)
b) všechny tři jevy dohromady ($\Rightarrow$ platí vzorec $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$).
Analogicky je možné určovat nezávislost více jevů než tří.

Př. 4: Házíme modrou a bílou kostkou. Číslo, které padne na modré kostce značíme *m*, číslo na bílé kostce *b*. Rozhodni zda jsou nezávislé jevy:
b) jev A: $m+b=7$ a jev B: $m=3$
b) jev C: $m+b=9$ a jev D: $m=4$
c) jev C: $m+b=9$ a jev E: $m>3$
d) jev F: $m+b=11$ a jev G: $m\neq 5$

Při hodu rozlišujeme barvy kostek $\Rightarrow$ množinou všech možných výsledků bude množina všech uspořádaných dvojic čísel 1 až 6

$$\Omega=\begin{Bmatrix}(1;1) & (1;2) & (1;3) & (1;4) & (1;5) & (1;6)\\ (2;1) & (2;2) & (2;3) & (2;4) & (2;5) & (2;6)\\ (3;1) & (3;2) & (3;3) & (3;4) & (3;5) & (3;6)\\ (4;1) & (4;2) & (4;3) & (4;4) & (4;5) & (4;6)\\ (5;1) & (5;2) & (5;3) & (5;4) & (5;5) & (5;6)\\ (6;1) & (6;2) & (6;3) & (6;4) & (6;5) & (6;6)\end{Bmatrix}$$

a) jev A: $m+b=7$ a jev B: $m=3$
zdánlivě stejný příklad jako v předchozím bodě
$P(A)$: možnosti, jak získat součet 7: $7=4+3\Rightarrow 2$ možnosti, $7=5+2\Rightarrow 2$ možnosti, $7=6+1\Rightarrow 2$ možnosti $\Rightarrow P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

$P(B)$: možnosti, kde $m=3$: celý třetí řádek tabulky $\Rightarrow$ 6 možností

$P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

$P(A\cap B)$: možnosti, jak získat součet 7 a $m=3$: jediná možnost $(3;4)$

$P(A\cap B)=\frac{1}{36}$

Dosadíme do vzorce pro násobení pravděpodobností: $P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$

$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$ $\Rightarrow$ jevy A: $m+b=7$ a B: $m=3$ jsou nezávislé

b) jev C: $m+b=9$ a jev D: $m=4$
zdánlivě stejný příklad jako v předchozím bodě
$P(C)$: možnosti, jak získat součet 9: $9=4+5\Rightarrow 2$ možnosti, $9=6+3\Rightarrow 2$ možnosti

$P(C)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

$P(D)$: možnosti, kde $m=4$: celý čtvrtý řádek tabulky $\Rightarrow$ 6 možností

$P(D)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

$P(C\cap D)$: možnosti, jak získat součet 9 a $m=4$: jediná možnost $(4;5)$

$P(C\cap D)=\frac{1}{36}$

Dosadíme do vzorce pro násobení pravděpodobností: $P(C)\cdot P(D)=P(C\cap D)$

$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{54}\neq\frac{1}{36}$ $\Rightarrow$ jevy C: $m+b=9$ a D: $m=4$ nejsou nezávislé

$\Rightarrow$ někdy je doopravdy těžké dopředu odhadnout, zda jsou jevy závislé či nezávislé

c) jev C: $m+b=9$ a jev E: $m>3$

$P(E)$: možnosti, kde $m>3$: celý čtvrtý, pátý a šestý řádek tabulky $\Rightarrow$ 18 možností

$P(E)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

$P(C\cap E)$: možnosti, jak získat součet 9 a $m>3$: tři možnosti $(4;5)$, $(5;4)$, $(6;3)$

$P(C\cap E)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

Dosadíme do vzorce pro násobení pravděpodobností: $P(C)\cdot P(E)=P(C\cap E)$

$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{18}\neq\frac{1}{12}$ $\Rightarrow$ jevy C: $m+b=9$ a E: $m>3$ nejsou nezávislé

d) jev F: $m+b=11$ a jev G: $m\neq 5$

$P(F)$: možnosti, jak získat součet 11: $11=6+5\Rightarrow 2$ možnosti

$P(F)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

$P(G)$: možnosti, kde $m\neq 5$: všechny řádky tabulky kromě pátého $\Rightarrow$ 25 možností

$P(G)=\frac{25}{36}$

$P(F\cap G)$: možnosti, jak získat součet 11 a $m\neq 5$: jediná možnost $(6;5)$

$P(F\cap G)=\frac{1}{36}$

Dosadíme do vzorce pro násobení pravděpodobností: $P(F)\cdot P(G)=P(F\cap G)$

$\frac{1}{18}\cdot\frac{25}{36}=\frac{25}{648}\neq\frac{1}{36}$ $\Rightarrow$ jevy F: $m+b=11$ a G: $m\neq 5$ nejsou nezávislé

Př. 5: Petáková:
strana 172/cvičení 32
strana 172/cvičení 34

Shrnutí: Pokud jsou dva jevy nezávislé, pravděpodobnost toho, že nastanou oba najednou se rovná součinu pravděpodobností, že nastane každý z nich.