9.2.1 Náhodné pokusy, možné výsledky, jevy

Předpoklady: 9110, 9114

Hodím kámen $\Rightarrow$ za normálních okolností jediný výsledek = spadne na zem
Hodíme kámen na terč $\Rightarrow$ několik možných výsledků (trefíme desítku, devítku, …, střela půjde zcela vedle) = **náhodný pokus –** i když se snažíme vždy o stejné provedení (a stejný výsledek- trefení desítky) získáváme různé výsledky, které závisí na náhodě

Př. 1: Jmenuj některé další náhodné pokusy a naopak pokusy, které nemůžeme označit za náhodné.

Nejběžnější náhodné pokusy:

- hod hrací kostkou
- hod mincí
- sejmutí karty z balíčku
- losování sportky
- měření rychlosti molekul vzduchu
- testování účinnosti nového léku
- zkoumání výnosů nové plodiny
- pokus o umělé oplodnění (vlastně i oplodnění přirozenou cestou)

Pokusy, které nemůžeme považovat za náhodné:

- zfialovění fenolftaleinu v zásaditém prostředí
- zapálení sirky vhozené do ohně
- zničení auta, které narazí v plné rychlosti do stěny

pokud začneme i jevy, které se nezdají být náhodné pozorovat podrobněji, zjistíme náhodné maličkost (jak fenoftalein obarvuje zkumavku, kde sirka chytne, jakým směrem odlétne kus krytu předního světla…)
v minulosti byla náhodnost pokusů brána jako důsledek nedostatečné znalosti počátečních podmínek (kdybychom věděli přesně, jak jsme kostku hodili a jak vypadá podložka, měli bychom být schopni spočítat, jaké číslo padne), dnes víme, že ani teoreticky není možné některé pokusy (hlavně v mikrosvětě) předpovědět jinak než jako náhodné pokusy s pravděpodobnostmi různých výsledků

Co potřebujeme na prozkoumání náhodného pokusu:
musíme znát všechny možné výsledky, kterými pokus může dopadnout a které splňují dvě podmínky:

- navzájem se vylučují (nemohou nastat dva naráz)
- jeden z nich nastane vždy

$\Rightarrow$ **množina všech možných výsledků pokusu** (značíme Ω), jednotlivé výsledky (prvky množiny všech možných výsledků) značíme ω

Podle náhodného pokusu, který zkoumáme může být Ω konečná (naše případy) i nekonečná.

Př. 2: Urči množinu všech možných výsledků při následujících náhodných pokusech:
a) hod klasickou hrací kostkou

b) hod mincí
c) sejmutí karty na začátku hry (vyšší vyhrává, mariášové karty)

a) hod klasickou hrací kostkou
na kostce může padnout šest různých hodnot $\Rightarrow$ $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

b) hod mincí
mince má dvě strany (rub a líc) $\Rightarrow \Omega = \{r; l\}$

c) sejmutí karty na začátku hry (vyšší vyhrává)
v balíčku je osm hodnot karet $\Rightarrow$ $\Omega = \{7; 8; 9; 10, spodek; svršek; král; eso\}$

V některých případech má množina tolik prvků, že se spojíme s tím, že určíme jejich počet a nepokoušíme se je všechny vypsat.

Př. 3: Do třídy 4B2009 chodí 31 studentů. Urči kolika způsoby může dopadnout losování:
a) šesti studentů, kteří budou postupně maturovat v první maturitní den
b) tří studentů, kteří zajistí vázy na květiny pro maturitní komisi

a) šesti studentů, kteří budou postupně maturovat v první maturitní den
šest studentů vybírám, maturovat budou postupně $\Rightarrow$ záleží na tom, kterého vybereme jako prvního a kterého jako druhého, vybíráme ze 31, bez opakování a záleží na pořadí $\Rightarrow$
$31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 = \frac{31!}{25!} = V_6(31)$ možností, prvků Ω

b) tří studentů, kteří zajistí vázy na květiny pro maturitní komisi
tři studenti musí zajistit vázy, nezáleží na tom, kterého vybereme jako prvního $\Rightarrow$ vybíráme ze 31 bez opakování, nezáleží na pořadí $\Rightarrow$ sestavujeme tříčlenné kombinace bez opakování
$\Rightarrow$ $K_3(31) = \binom{31}{3} = \frac{31!}{28! \cdot 3!}$ možností, prvků Ω

Tak už je jasné, že budeme kombinatoriku docela často potřebovat.

Pedagogická poznámka: Z pedagogického hlediska není slovní zadání předchozího příkladu nejvhodnější. Jakmile se objevilo slovo maturita, propadla třída panice a začaly se ozývat vzdechy: „Radši o tom ani nemluv!“ …

V některých případech můžeme množinu všech možných výsledků sestavovat více způsoby:

Př. 4: Sestav množinu všech možných výsledků náhodného pokusu hod třemi stejnými mincemi.

první přístup: mince jsou stejné a nerozlišujeme je $\Rightarrow$ Ω má čtyři prvky:
$\Omega = \{(3r); (2r, 1l); (1r; 2l); (3l)\}$

druhý přístup: všímáme si, na které z mincí, co padlo $\Rightarrow$ rozlišujeme mince mezi sebou $\Rightarrow$
Ω má osm prvků: $\Omega = \{(r,r,r); (r,r,l); (r,l,r); (l,r,r); (r,l,l); (l,r,l); (l,l,r); (l,l,l)\}$

Ačkoliv se zdá, že první přístup je bližší skutečnosti (pokud mince hodíme najednou budeme je těžko rozlišovat) a je jednodušší (množina Ω má méně prvků), v počtu pravděpodobnosti je daleko výhodnější druhý postup, protože všechny **možnosti jsou v něm rovnocenné** („stejně pravděpodobné“) a v takovém případě jsou všechny úvahy snazší (je zřejmé, že v prvním přístupu jsou možnosti $(2r,1l);(1r;2l)$ pravděpodobnější než možnosti zbývající protože mohou nastat třemi způsoby.

Zásada: Pokud to bude jen trochu možné, budeme množinu všech možných výsledků sestavovat tak, aby všechny výsledky v této množině byly rovnocenné.

Vrátíme se k našemu pokusu se třemi mincemi. Množina všech možných výsledků má osm prvků: $\Omega = \{(r,r,r);(r,r,l);(r,l,r);(l,r,r);(r,l,l);(l,r,l);(l,l,r);(l,l,l)\}$. Zjišťovat zda nastala pouze možnost (r,l,l) není příliš zajímavé. Zajímá nás například zda na všech mincích padlo to samé $\Rightarrow$ takový výsledek nemáme, ale máme dva výsledky, které tuto podmínku splňují, pokud je dáme dohromady vytvoří **podmnožinu množiny** Ω, které říkáme **jev**. Jezy většinou značíme velkými písmeny:
$A = \{(r,r,r);(l,l,l)\}$ - jev *A*, že všech mincích padlo to samé

Př. 5: Urči výpisem následující jevy, které mohou nastat při hodu třemi mincemi:
b) jev *B*, při hodu padl na alespoň jedné minci rub a alespoň na jedné líc
c) jev *C*, při hodu padl alespoň dvakrát líc
d) jev *D*, při hodu padl jenom líc

b) jev *B*, při hodu padl na alespoň jedné kostce rub a alespoň na jedné líc
$B = \{(r,r,l);(r,l,r);(l,r,r);(r,l,l);(l,r,l);(l,l,r)\}$

c) jev *C*, při hodu padl alespoň dvakrát líc
$C = \{(r,l,l);(l,r,l);(l,l,r);(l,l,l)\}$

d) jev *D*, při hodu padl jenom líc
$D = \{(l,l,l)\}$

Celá oblast jevů má svoji terminologii:

- $E = \emptyset$ = **nemožný jev** (například: „padnou čtyři líce“, jev je jednom jeden, ale popsat ho můžeme mnoha způsoby)
- $F = \Omega$ = jistý jev (například: „padne kombinace líců a rubů“)
- $(l,l,r) \in B$ (obecně $\omega \in B$), **výsledek ω je příznivý jevu *B***
- $D \subset C$ = jev *D* je **podjevem** jevu *C*
- jev $A \cap B$ je **průnikem** jevů *A* a *B* a nastává pokud **nastávají najednou** jevy *A* a *B*
- jev $A \cup B$ je **sjednocením** jevů *A* a *B* a nastává pokud **nastává alespoň jeden** z jevů *A* a *B*
- Je-li $A \cap B = \emptyset$ = jevy *A* a *B* se **navzájem vylučují**
- A' = **jev opačný** k jevu *A* (nastává právě tehdy, když jev *A* nenastává)

Pedagogická poznámka: Stihnout oba zbývající příklady je obtížné, ale myslím, že to není velký problém.

Př. 6: Pro předchozí příklad hodu třemi mincemi najdi:
a) jev, který je podjevem jevu *C*
b) jev, který se vylučuje s jevem *B*
c) jev opačný k jevu *B*
d) jev, který je průnikem jevů *B* a *C*
e) jev, který je sjednocením jevů *A* a *C*

a) jev, který je podjevem jevu *C*
podjevem jevu *C* je například jev *D* (padly jenom líce),
jiný další podjev $E=\{(r,l,l);(l,r,l);(l,l,r)\}$ - „padly dva líce a jeden rub“

b) jev, který se vylučuje s jevem *B*
s jevem *B* se vylučuje jev $A=\{(r,r,r);(l,l,l)\}$, nebo jev $D=\{(l,l,l)\}$

c) jev opačný k jevu *B*
opačným jevem k jevu *B* je jev $A=\{(r,r,r);(l,l,l)\}$ (jev *D* opačný není, protože neobsahuje výsledek (r,r,r)

d) jev, který je průnikem jevů *B* a *C*
platí: $B\cap C=E$

e) jev, který je sjednocením jevů *A* a *C*
sjednocením jevů *A* a *C* je jev $F=\{(r,r,r);(r,l,l);(l,r,l);(l,l,r);(l,l,l)\}$ - „nepadl právě jeden líc“

Př. 7: Osudí obsahuje čtyři barevné koule: bílou, fialovou, zelenou, a modrou. Při pokusu náhodně najednou vytáhneme z osudí dvě koule.
a) sestav množinu Ω (množinu všech možných výsledků pokusu)
b) Najdi výsledky příznivé jevu M (tažena modrá koule) a B (tažena bílá koule)
c) Urči jevy $M\cup B$ a $M\cap B$.
U všech jevů urči počet příznivých výsledků.

a) sestav množinu Ω (množinu všech možných výsledků pokusu)
všechny možné dvojice ze čtyř možností, nezáleží na uspořádání
$\Omega=\{(b,f);(b,z);(b,m);(f,z);(f,m);(z,m)\}$ (všechny výsledky jsou rovnocenné), 6 prvků

b) Najdi výsledky příznivé jevu M (tažena modrá koule) a B (tažena bílá koule)
$M=\{(b,m);(f,m);(z,m)\}$ - 3 prvky
$B=\{(b,f);(b,z);(b,m)\}$ - 3 prvky

c) Urči jevy $M\cup B$ a $M\cap B$.
$M\cup B=\{(b,f);(b,z);(b,m);(f,m);(z,m)\}$ - 5 prvků
$M\cap B=\{(b,m)\}$

Shrnutí: Množinu všech možných výsledků se snažíme sestavit tak, aby všechny její prvky byly rovnocenné.