## 9.1.17 Užití binomické věty

**Předpoklady:** 9116

Často nám z binomického rozvoje stačí pouze jeden konkrétní člen.

**Př. 1:** Urči šestý člen binomického rozvoje $\left(2xy+\frac{x}{y^2}\right)^{12}$

Binomický rozvoj začíná: $(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\dots$ $\Rightarrow$ šestý člen bude mít jako dolní číslo binomického koeficientu číslo 5 $\Rightarrow$

$$\binom{12}{5}(2xy)^7\left(\frac{x}{y^2}\right)^5=\binom{12}{5}2^7x^7y^7\frac{x^5}{y^{10}}=\binom{12}{5}2^7\frac{x^{12}}{y^3}=101376\frac{x^{12}}{y^3}$$

**Pedagogická poznámka:** Vždy se najde někdo, kdo si neuvědomí, že mocniny $b$ a spodní čísla v binomických koeficientech začínají od nuly a počítá sedmý člen místo šestého.

**Př. 2:** Urči absolutní člen binomického rozvoje $\left(2x^3+\frac{3}{2x}\right)^{12}$.

absolutní člen = člen, který neobsahuje neznámou $\Rightarrow$ musíme najít taková čísla, aby platilo:

- pokrácení neznámé $\Rightarrow$ $(x^3)^a\left(\frac{1}{x}\right)^b=1$ $\Rightarrow$ $3a+b=0\Rightarrow b=3a$
- $a+b=12$ (platnost binomické věty)

$\Rightarrow$ $a+3a=12\Rightarrow a=3;b=9$ $\Rightarrow$ hledáme desátý člen (pro $k=10$)

hledaný člen: $\binom{12}{9}(2x^3)^3\left(\frac{3}{2x}\right)^9=\binom{12}{9}2^3x^9\frac{3^9}{2^9x^9}=\binom{12}{9}\frac{3^9}{2^6}=\frac{1082565}{16}$

**Pedagogická poznámka:** Pokud je málo času, stačí spočítat u následujícího příkladu pouze jeden z obou bodů.

**Př. 3:** Pomocí binomické věty vyjádři v algebraickém tvaru komplexní čísla:

a) $(1-i)^7$ b) $\left(\sqrt{3}-i\right)^5$

a)

$$(1-i)^7=\binom{7}{0}1^7+\binom{7}{1}1^6(-i)^1+\binom{7}{2}1^5(-i)^2+\binom{7}{3}1^4(-i)^3+\binom{7}{4}1^3(-i)^4+\binom{7}{5}1^2(-i)^5+$$

$$+\binom{7}{6}1(-i)^6+\binom{7}{7}(-i)^7=1-7i+21i^2-35i^3+35i^4-21i^5+7i^6-i^7=$$

$$=1-7i-21-35i+35-21i-7+i=8-8i$$

b)

$\left(\sqrt{3}-i\right)^5=$

$$=\binom{5}{0}\left(\sqrt{3}\right)^5+\binom{5}{1}\left(\sqrt{3}\right)^4(-i)^1+\binom{5}{2}\left(\sqrt{3}\right)^3(-i)^2+\binom{5}{3}\left(\sqrt{3}\right)^2(-i)^3+\binom{5}{4}\left(\sqrt{3}\right)(-i)^4+\binom{5}{5}(-i)^5=$$

$$=9\sqrt{3}-5\cdot 9i+10\cdot 3\sqrt{3}\cdot i^2-10\cdot 3i^3+5\sqrt{3}\cdot i^4-i^5=9\sqrt{3}-45i-30\sqrt{3}+30i+5\sqrt{3}-i=$$

$$=-16\sqrt{3}-16i$$

Pomocí binomické věty je možné spočítat i operace, které by jinak bez kalkulačky byly značným oříškem

**Př. 4:** Vypočti $1{,}01^5$ bez kalkulačky pomocí binomické věty.

Problém: V zadání není nikde vidět binomická věta $\Rightarrow$ musíme vytvořit dvojčlen $\Rightarrow$

$1{,}01^5=\left(1+0{,}01\right)^5=\left(1+10^{-2}\right)^5=$

$$=\binom{5}{0}1^5+\binom{5}{1}1^4\left(10^{-2}\right)^1+\binom{5}{2}1^3\left(10^{-2}\right)^2+\binom{5}{3}1^2\left(10^{-2}\right)^3+\binom{5}{4}1\left(10^{-2}\right)^4+\binom{5}{5}\left(10^{-2}\right)^5=$$

$$=1+5\cdot 10^{-2}+10\cdot 10^{-4}+10\cdot 10^{-6}+5\cdot 10^{-8}+10^{-10}=1{,}0510100501$$

**Pedagogická poznámka:** Většinu následujících příkladů není naprostá většina studentů schopna vyřešit samostatně. Nemá cenu je nechávat příliš dlouho se trápit, lepší je popostrčit třídu a nechat ji příklady dopočítat.

**Př. 5:** Urči součet $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$

Součet připomíná binomický rozvoj, kterému chybí mocniny *a* a *b*. Přesně takto by však rozvoj vypadal, kdyby platilo $a=b=1$ $\Rightarrow$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=$$

$$=\binom{n}{0}1^n+\binom{n}{1}1^{n-1}\cdot 1+\binom{n}{2}1^{n-2}\cdot 1^2+\ldots+\binom{n}{n-1}1\cdot 1^{n-1}+\binom{n}{n}1^n=\left(1+1\right)^n=2^n$$

Správnost výsledku si můžeme zkontrolovat. Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ udává počet *k*-prvkových podmnožin množiny s *n* prvky $\Rightarrow$ výraz $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$ udává počet všech podmnožin množiny *n* prvky, kterých je $2^n$ (jak jsme si říkali, když jsme probírali variace s opakováním.

**Př. 6:** Pomocí binomické věty dokaž, že výraz $6^n - 1$ je pro každé přirozené číslo *n* dělitelný pěti.

Je to divné, ale asi to opravdu funguje:

$n=1 \Rightarrow 6^n - 1 = 6^1 - 1 = 5$ - je dělitelné pěti

$n=2 \Rightarrow 6^n - 1 = 6^2 - 1 = 25$ - je dělitelné pěti

$n=3 \Rightarrow 6^n - 1 = 6^3 - 1 = 215$ - je dělitelné pěti

$\Rightarrow$ hledáme důkaz

- dělitelnost 5 $\Rightarrow$ z výrazu $6^n - 1$ musíme vytknout 5 (zatím tam žádná není)
- výraz $6^n - 1$ neobsahuje binomickou větu, kterou máme použít

$\Rightarrow$ napíšeme $6^n - 1 = (5+1)^n - 1$ a máme obojí (pětku i binomickou větu)

použijeme binomickou větu:

$$(5+1)^n - 1 = (a+b)^n = \left[\binom{n}{0}5^n + \binom{n}{1}5^{n-1}1^1 + \binom{n}{2}5^{n-2}1^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}5\cdot 1^{n-1} + \binom{n}{n}1^n\right] - 1 =$$

$$= \binom{n}{0}5^n + \binom{n}{1}5^{n-1}1^1 + \binom{n}{2}5^{n-2}1^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}5\cdot 1^{n-1} + \underbrace{\underbrace{\binom{n}{n}1^n}_{1} - 1}_{0} =$$

$$= 5\left[\binom{n}{0}5^{n-1} + \binom{n}{1}5^{n-2} + \binom{n}{2}5^{n-3}1^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}\right]$$

všechny členy binomického rozkladu obsahují mocniny pěti, kromě posledního, který se rovná 1 a odečte se s jedničkou, která stojí mimo binomický rozklad $\Rightarrow$ můžeme vytknout 5 a tedy výraz $6^n - 1$ je pro každé přirozené číslo *n* dělitelný pěti.

**Poznámka:** Trik použitý v předchozím příkladu se při důkazech dělitelnosti používá často.

**Př. 7:** Zaokrouhli číslo $1,01^7$ na setiny.

Půjdeme na to přes binomickou větu:

$$1,01^7 = (1+0,01)^7 =$$

$$= \binom{7}{0}1^7 + \binom{7}{1}1^6\left(10^{-2}\right)^1 + \binom{7}{2}1^5\left(10^{-2}\right)^2 + \binom{7}{3}1^4\left(10^{-2}\right)^3 + \binom{7}{4}1^3\left(10^{-2}\right)^4 +$$

$$+ \binom{7}{5}1^2\left(10^{-2}\right)^5 + \binom{7}{6}1\left(10^{-2}\right)^6 + \binom{7}{7}\left(10^{-2}\right)^7 =$$

$$= \binom{7}{0}1^7 + \binom{7}{1}10^{-2} + \binom{7}{2}10^{-4} + \binom{7}{3}10^{-6} + \binom{7}{4}10^{-8} + \binom{7}{5}10^{-10} + \binom{7}{6}10^{-12} + \binom{7}{7}10^{-14} =$$

členy binomického rozvoje se od leva doprava postupně zmenšují (kvůli zvětšující záporné mocnině desítky) $\Rightarrow$ musíme najít nejmenší člen, který ještě ovlivňuje výsledek na tisíciny

$\Rightarrow$ zkusíme člen $\binom{7}{2}10^{-4} = 21\cdot 10^{-4}$ - členy více napravo jsou ještě menší $\Rightarrow$

$$1,01^7 \doteq \binom{7}{0}1^7 + \binom{7}{1}10^{-2} + \binom{7}{2}10^{-4} = 1 + 7\cdot 10^{-2} + 21\cdot 10^{-4} = 1,0721 \doteq 1,072$$

Číslo $1,01^7$ zaokrouhlené na tisíciny se rovná 1,072.

**Dodatek:** V době předkalkulačkové byla jednou z nejdůležitějších oblastí užitné matematiky oblast přibližných výpočtů.
Jedním z nejběžnějších vzorců byl vztah: $(1+x)^n \doteq 1+nx$, používaný zejména v situacích, kdy $|x| \ll 1$ ($|x|$ je daleko menší než 1).
Pomocí binomické věty můžeme odhadnout chybu takového zanedbání.

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}x + \binom{n}{2}1^{n-2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n =$$

$$1+nx+\binom{n}{2}1^{n-2}x^2+\ldots+\binom{n}{n}x^n$$

$\Rightarrow$ Chyba zanedbání $\left|(1+x)^n-(1+nx)\right|$ je rovna absolutní hodnotě vynechaných členů binomického rozvoje:

$$\left|(1+x)^n-(1+nx)\right| = \left|\binom{n}{2}1^{n-2}x^2+\ldots+\binom{n}{n}x^n\right| = \left|x^2\right|\left|\binom{n}{2}+\binom{n}{3}x+\ldots+\binom{n}{n}x^{n-2}\right|$$

platí: $|a_1+a_2+\ldots+a_k| \le |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_k| \Rightarrow$

$$\left|(1+x)^n-(1+nx)\right| = \left|x^2\right|\left|\binom{n}{2}+\binom{n}{3}x+\ldots+\binom{n}{n}x^{n-2}\right| \le \left|x^2\right|\left[\binom{n}{2}+\binom{n}{3}|x|+\ldots+\binom{n}{n}\left|x^{n-2}\right|\right]$$

dále víme, že $|x|<1 \Rightarrow \binom{n}{3}|x| < \binom{n}{3}$, …, $\binom{n}{n}\left|x^{n-2}\right| < \binom{n}{n}$, a ještě $\left|x^2\right| = x^2$

a tedy: $\left|x^2\right|\left[\binom{n}{2}+\binom{n}{3}|x|+\ldots+\binom{n}{n}\left|x^{n-2}\right|\right] < x^2\left[\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n}\right]$

pro součet kombinačních čísel v závorce platí: $\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n} < 2^n$

celkově tedy dostáváme: $\left|(1+x)^n-(1+nx)\right| < x^2\cdot 2^n$

V konkrétním případě u příkladu 7 by horní odhad chyby vyšel: $0,01^2\cdot 2^7 = 0,0128$.

**Př. 8:** Petáková:
strana 148/cvičení 83
strana 149/cvičení 86
strana 149/cvičení 90
strana 149/cvičení 92 a) c) e)
strana 149/cvičení 99 b) d)

**Shrnutí:**