

9.1.17 Užití binomické věty

Předpoklady: 9116

Často nám z binomického rozvoje stačí pouze jeden konkrétní člen.

Př. 1: Urči šestý člen binomického rozvoje $\left(2xy + \frac{x}{y^2}\right)^{12}$

Binomický rozvoj začíná: $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots \Rightarrow$ šestý člen bude mít jako dolní

číslo binomického koeficientu číslo 5 \Rightarrow

$$\binom{12}{5}(2xy)^7 \left(\frac{x}{y^2}\right)^5 = \binom{12}{5}2^7 x^7 y^7 \frac{x^5}{y^{10}} = \binom{12}{5}2^7 \frac{x^{12}}{y^3} = 101376 \frac{x^{12}}{y^3}$$

Pedagogická poznámka: Vždy se najde někdo, kdo si neuvědomí, že mocniny b a spodní čísla v binomických koeficientech začínají od nuly a počítá sedmý člen místo šestého.

Př. 2: Urči absolutní člen binomického rozvoje $\left(2x^3 + \frac{3}{2x}\right)^{12}$.

absolutní člen = člen, který neobsahuje neznámou \Rightarrow musíme najít taková čísla, aby platilo:

- pokrácení neznámé $\Rightarrow (x^3)^a \left(\frac{1}{x}\right)^b = 1 \Rightarrow 3a + b = 0 \Rightarrow b = -3a$
- $a + b = 12$ (platnost binomické věty)

$\Rightarrow a + 3a = 12 \Rightarrow a = 3; b = 9 \Rightarrow$ hledáme desátý člen (pro $k = 10$)

hledaný člen: $\binom{12}{9}(2x^3)^3 \left(\frac{3}{2x}\right)^9 = \binom{12}{9}2^3 x^9 \frac{3^9}{2^9 x^9} = \binom{12}{9} \frac{3^9}{2^6} = \frac{1082565}{16}$

Pedagogická poznámka: Pokud je málo času, stačí spočítat u následujícího příkladu pouze jeden z obou bodů.

Př. 3: Pomocí binomické věty vyjádři v algebraickém tvaru komplexní čísla:

a) $(1-i)^7$

b) $(\sqrt{3}-i)^5$

a)

$$(1-i)^7 = \binom{7}{0}1^7 + \binom{7}{1}1^6(-i)^1 + \binom{7}{2}1^5(-i)^2 + \binom{7}{3}1^4(-i)^3 + \binom{7}{4}1^3(-i)^4 + \binom{7}{5}1^2(-i)^5 +$$

$$+ \binom{7}{6}1(-i)^6 + \binom{7}{7}(-i)^7 = 1 - 7i + 21i^2 - 35i^3 + 35i^4 - 21i^5 + 7i^6 - i^7 =$$

$$= 1 - 7i - 21 - 35i + 35 - 21i - 7 + i = 8 - 8i$$

b)

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3} - i)^5 = \\ & = \binom{5}{0}(\sqrt{3})^5 + \binom{5}{1}(\sqrt{3})^4(-i)^1 + \binom{5}{2}(\sqrt{3})^3(-i)^2 + \binom{5}{3}(\sqrt{3})^2(-i)^3 + \binom{5}{4}(\sqrt{3})(-i)^4 + \binom{5}{5}(-i)^5 = \\ & = 9\sqrt{3} - 5 \cdot 9i + 10 \cdot 3\sqrt{3} \cdot i^2 - 10 \cdot 3i^3 + 5\sqrt{3} \cdot i^4 - i^5 = 9\sqrt{3} - 45i - 30\sqrt{3} + 30i + 5\sqrt{3} - i = \\ & = -16\sqrt{3} - 16i \end{aligned}$$

Pomocí binomické věty je možné spočítat i operace, které by jinak bez kalkulačky byly značným oříškem

Př. 4: Vypočti $1,01^5$ bez kalkulačky pomocí binomické věty.

Problém: V zadání není nikde vidět binomická věta \Rightarrow musíme vytvořit dvojčlen \Rightarrow

$$\begin{aligned} & 1,01^5 = (1 + 0,01)^5 = (1 + 10^{-2})^5 = \\ & = \binom{5}{0}1^5 + \binom{5}{1}1^4(10^{-2})^1 + \binom{5}{2}1^3(10^{-2})^2 + \binom{5}{3}1^2(10^{-2})^3 + \binom{5}{4}1(10^{-2})^4 + \binom{5}{5}(10^{-2})^5 = \\ & = 1 + 5 \cdot 10^{-2} + 10 \cdot 10^{-4} + 10 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-8} + 10^{-10} = 1,0510100501 \end{aligned}$$

Pedagogická poznámka: Většinu následujících příkladů není naprostá většina studentů schopna vyřešit samostatně. Nemá cenu je nechávat příliš dlouho se trápit, lepší je popostrčit třídu a nechat ji příklady dopočítat.

Př. 5: Urči součet $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$

Součet připomíná binomický rozvoj, kterému chybí mocniny a a b . Přesně takto by však rozvoj vypadal, kdyby platilo $a = b = 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} & \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \\ & = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1} \cdot 1 + \binom{n}{2}1^{n-2} \cdot 1^2 + \dots + \binom{n}{n-1}1 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{n}1^n = (1+1)^n = 2^n \end{aligned}$$

Správnost výsledku si můžeme zkontrolovat. Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ udává počet k -prvkových

podmnožin množiny s n prvky \Rightarrow výraz $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$ udává počet

všech podmnožin množiny n prvky, kterých je 2^n (jak jsme si říkali, když jsme probírali variace s opakováním).

Př. 6: Pomocí binomické věty dokaž, že výraz $6^n - 1$ je pro každé přirozené číslo n dělitelný pěti.

Je to divné, ale asi to opravdu funguje:

$$n = 1 \Rightarrow 6^n - 1 = 6^1 - 1 = 5 \quad - \text{ je dělitelné pěti}$$

$$n = 2 \Rightarrow 6^n - 1 = 6^2 - 1 = 25 \quad - \text{ je dělitelné pěti}$$

$$n = 3 \Rightarrow 6^n - 1 = 6^3 - 1 = 215 \quad - \text{ je dělitelné pěti}$$

\Rightarrow hledáme důkaz

- dělitelnost 5 \Rightarrow z výrazu $6^n - 1$ musíme vytknout 5 (zatím tam žádná není)
- výraz $6^n - 1$ neobsahuje binomickou větu, kterou máme použít

\Rightarrow napíšeme $6^n - 1 = (5+1)^n - 1$ a máme obojí (pětku i binomickou větu)

použijeme binomickou větu:

$$\begin{aligned} (5+1)^n - 1 &= (a+b)^n = \left[\binom{n}{0} 5^n + \binom{n}{1} 5^{n-1} 1^1 + \binom{n}{2} 5^{n-2} 1^2 + \dots + \binom{n}{n-1} 5 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{n} 1^n \right] - 1 = \\ &= \binom{n}{0} 5^n + \binom{n}{1} 5^{n-1} 1^1 + \binom{n}{2} 5^{n-2} 1^2 + \dots + \binom{n}{n-1} 5 \cdot 1^{n-1} + \underbrace{\binom{n}{n} 1^n}_{1} - 1 = \\ &= 5 \left[\binom{n}{0} 5^{n-1} + \binom{n}{1} 5^{n-2} + \binom{n}{2} 5^{n-3} 1^2 + \dots + \binom{n}{n-1} \right] \end{aligned}$$

všechny členy binomického rozkladu obsahují mocniny pěti, kromě posledního, který se rovná 1 a odečte se s jedničkou, která stojí mimo binomický rozklad \Rightarrow můžeme vytknout 5 a tedy výraz $6^n - 1$ je pro každé přirozené číslo n dělitelný pěti.

Poznámka: Trik použitý v předchozím příkladu se při důkazech dělitelnosti používá často.

Př. 7: Zaokrouhli číslo $1,01^7$ na setiny.

Půjdeme na to přes binomickou větu:

$$1,01^7 = (1+0,01)^7 =$$

$$= \binom{7}{0} 1^7 + \binom{7}{1} 1^6 (10^{-2})^1 + \binom{7}{2} 1^5 (10^{-2})^2 + \binom{7}{3} 1^4 (10^{-2})^3 + \binom{7}{4} 1^3 (10^{-2})^4 +$$

$$+ \binom{7}{5} 1^2 (10^{-2})^5 + \binom{7}{6} 1 (10^{-2})^6 + \binom{7}{7} (10^{-2})^7 =$$

$$= \binom{7}{0} 1^7 + \binom{7}{1} 10^{-2} + \binom{7}{2} 10^{-4} + \binom{7}{3} 10^{-6} + \binom{7}{4} 10^{-8} + \binom{7}{5} 10^{-10} + \binom{7}{6} 10^{-12} + \binom{7}{7} 10^{-14} =$$

členy binomického rozvoje se od leva doprava postupně zmenšují (kvůli zvětšující záporné mocnině desítky) \Rightarrow musíme najít nejmenší člen, který ještě ovlivňuje výsledek na tisíce

\Rightarrow zkusíme člen $\binom{7}{2} 10^{-4} = 21 \cdot 10^{-4}$ - členy více napravo jsou ještě menší \Rightarrow

$$1,01^7 \doteq \binom{7}{0} 1^7 + \binom{7}{1} 10^{-2} + \binom{7}{2} 10^{-4} = 1 + 7 \cdot 10^{-2} + 21 \cdot 10^{-4} = 1,0721 \doteq 1,072$$

Číslo $1,01^7$ zaokrouhlené na tisíciny se rovná 1,072.

Dodatek: V době předkalkulačkové byla jednou z nejdůležitějších oblastí užité matematiky oblast přibližných výpočtů.

Jedním z nejběžnějších vzorců byl vztah: $(1+x)^n \doteq 1+nx$, používaný zejména v situacích, kdy $|x| \ll 1$ ($|x|$ je daleko menší než 1).

Pomocí binomické věty můžeme odhadnout chybu takového zanedbání.

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}x + \binom{n}{2}1^{n-2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n =$$

$$1+nx + \binom{n}{2}1^{n-2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

\Rightarrow Chyba zanedbání $|(1+x)^n - (1+nx)|$ je rovna absolutní hodnotě vynechaných členů binomického rozvoje:

$$|(1+x)^n - (1+nx)| = \left| \binom{n}{2}1^{n-2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n \right| = |x^2| \left| \binom{n}{2} + \binom{n}{3}x + \dots + \binom{n}{n}x^{n-2} \right|$$

platí: $|a_1 + a_2 + \dots + a_k| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_k| \Rightarrow$

$$|(1+x)^n - (1+nx)| = |x^2| \left| \binom{n}{2} + \binom{n}{3}x + \dots + \binom{n}{n}x^{n-2} \right| \leq |x^2| \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3}|x| + \dots + \binom{n}{n}|x^{n-2}| \right]$$

dále víme, že $|x| < 1 \Rightarrow \binom{n}{3}|x| < \binom{n}{3}$, ..., $\binom{n}{n}|x^{n-2}| < \binom{n}{n}$, a ještě $|x^2| = x^2$

$$\text{a tedy: } |x^2| \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3}|x| + \dots + \binom{n}{n}|x^{n-2}| \right] < x^2 \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} \right]$$

pro součet kombinačních čísel v závorce platí: $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} < 2^n$

celkově tedy dostáváme: $|(1+x)^n - (1+nx)| < x^2 \cdot 2^n$

V konkrétním případě u příkladu 7 by horní odhad chyby vyšel:

$$0,01^2 \cdot 2^7 = 0,0128.$$

Př. 8: Petáková:

strana 148/cvičení 83

strana 149/cvičení 86

strana 149/cvičení 90

strana 149/cvičení 92 a) c) e)

strana 149/cvičení 99 b) d)

Shrnutí: