

## 9.1.16 Binomická věta

### Předpoklady: 9114

Řádky Pascalova trojúhelníku nám něco připomínají. Kdysi dávno v prvním ročníku jsme se učili vzorce na umocňování dvojčlenu.

$(a+b)^1$	$a+b$	1 1
$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$	1 5 10 10 5 1

**Př. 1:** Napiš další řádek předchozí tabulky pro  $(a+b)^6$ .

Z tabulky je vidět:

- mocniny  $a$  se postupně snižují od hodnoty mocniny k nule
- mocniny  $b$  se postupně zvyšují od nule k hodnotě mocniny
- číselné koeficienty v mnohočlenu, který vznikl umocněním odpovídají příslušnému řádku Pascalova trojúhelníku. Pro rozvoj mocniny  $(a+b)^6$  potřebujeme sedmý řádek Pascalova trojúhelníku.

$$\Rightarrow (a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

**Př. 2:** Odhadni vzorec pro výraz  $(a+b)^n$ .

Budeme postupovat stejně jako v předchozím příkladě:

- mocniny  $a$  se postupně snižují od  $n$  k nule
- mocniny  $b$  se postupně zvyšují od nule k  $n$
- číselné koeficienty v mnohočlenu, který vznikl umocněním odpovídají příslušnému řádku Pascalova trojúhelníku. Pro rozvoj mocniny  $(a+b)^n$  potřebujeme  $(n+1)$ -ní řádek Pascalova trojúhelníku (řádek s kombinačními čísly s horní hodnotou  $n$ )

$$\Rightarrow (a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Než si tento výsledek zapíšeme jako větu, musíme si jej alespoň trochu ověřit.

Jak vznikají jednotlivé členy rozvoje?

Zkusíme si to na nejnižších mocninách:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$

Barevně jsme rozlišili písmenka z první a z druhé závorky  $\Rightarrow$

- člen  $a^2$  je ve výsledku pouze jednou, protože jsme měli pouze jeden člen  $a \cdot a$
- člen  $ab$  je ve výsledku dvakrát, vznikl součtem členů  $a \cdot b + b \cdot a$

- člen  $b^2$  je ve výsledku pouze jednou, protože jsme měli pouze jeden člen  $b \cdot b$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) = \\ &= a \cdot a \cdot a + a \cdot b \cdot a + b \cdot a \cdot a + b \cdot b \cdot a + a \cdot a \cdot b + a \cdot b \cdot b + b \cdot a \cdot b + b \cdot b \cdot b = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

Barevně jsme rozlišili písmenka z první a z druhé závorky  $\Rightarrow$

- člen  $a^3$  je ve výsledku pouze jednou, protože jsme měli pouze jeden člen  $a \cdot a \cdot a$
- člen  $a^2b$  je ve výsledku třikrát, vznikl součtem členů  $a \cdot b \cdot a + b \cdot a \cdot a + a \cdot a \cdot b$
- člen  $ab^2$  je ve výsledku třikrát, vznikl součtem členů  $b \cdot b \cdot a + a \cdot b \cdot b + b \cdot a \cdot b$
- člen  $b^3$  je ve výsledku pouze jednou, protože jsme měli pouze jeden člen  $b \cdot b \cdot b$

$\Rightarrow$  jednotlivé členy v rozvoji vznikají součtem uspořádaných  $k$ -tic z  $a$  a  $b$  (při násobení nezáleží na pořadí)

- člen  $a^3$  je v rozvoji jednou, protože existuje pouze jedna uspořádaná trojice ze tří  $a$
- člen  $a^2b$  je v rozvoji třikrát, protože existují tři uspořádané trojice ze dvou  $a$  a jednoho  $b$

Jak určíme počet uspořádaných trojic ze dvou  $a$  a jednoho  $b \Rightarrow$  permutace s opakováním ze

$$\text{dvou a jednoho prvku} \Rightarrow \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3 \text{ možnosti}$$

Jak to bude v rozvoji  $(a+b)^n$  třeba u členu  $a^{n-2}b^2$ ?

máme  $(n-2)$  krát  $a$  a 2 krát  $b \Rightarrow$  uspořádané  $n$ -tice z  $(n-2)$  a 2 prvků  $\Rightarrow$

$$\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} \text{ možností}$$

Jak to bude v rozvoji  $(a+b)^n$  třeba u členu  $a^{n-k}b^k$ ?

máme  $(n-k)$  krát  $a$  a  $k$  krát  $b \Rightarrow$  uspořádané  $n$ -tice z  $(n-k)$  a  $k$  prvků  $\Rightarrow$

$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ možností}$$

**Binomická věta:**

Pro všechna čísla  $a, b$  a každé přirozené číslo  $n$  platí:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

**Dodatek:** Pomocí sumy je zápis binomické věty značně úspornější:  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ .

**Názvosloví:**

- **binom** – dvojčlen (odtud jméno věty)
- **binomický koeficient** – jiné pojmenování kombinačních čísel na pravé straně vzorce (v zahraničí se používá obecně místo termínu kombinační číslo)
- **binomický rozvoj** – pravá strana vzorce v binomické větě

**Př. 3:** (BONUS) Dokaž matematickou indukcí binomickou větu.

Postupujeme ve dvou krocích:

1.  $k = 1$

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^{1-1}b^1 = a+b \quad \text{vzorec platí}$$

2. předpokládáme platnost pro  $k$ , chceme dokázat platnost pro  $k+1$

$$\text{víme: } (a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \dots + \binom{k}{k-1}a^1b^{k-1} + \binom{k}{k}b^k$$

platí:

$$\begin{aligned} (a+b)^{k+1} &= (a+b)^k (a+b) = \\ &= \left[ \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \dots + \binom{k}{k-1}a^1b^{k-1} + \binom{k}{k}b^k \right] \cdot (a+b) \end{aligned}$$

zaměříme se na prostředek:

$$\begin{aligned} &\left[ \dots + \binom{k}{m}a^{k-m}b^m + \binom{k}{m+1}a^{k-m-1}b^{m+1} + \dots \right] (a+b) \Rightarrow \\ &\dots + \binom{k}{m}a^{k-m}b^m \cdot b + \binom{k}{m+1}a^{k-m-1}b^{m+1} \cdot a + \dots = \dots + \binom{k}{m}a^{k-m}b^{m+1} + \binom{k}{m+1}a^{k-m}b^{m+1} + \dots = \\ &= \dots + \left[ \binom{k}{m} + \binom{k}{m+1} \right] a^{k-m}b^{m+1} + \dots = \dots + \binom{k+1}{m+1}a^{k-m}b^{m+1} + \dots \end{aligned}$$

získali jsme člen rozvoje dalšího řádu  $\Rightarrow$  vzorec platí i pro  $k+1$   
věta je dokázána

**Př. 4:** Vypočti pomocí binomické věty:

a)  $(a+b)^7$

b)  $(x-y)^5$

c)  $(1+\sqrt{2})^6$

d)  $\left(4x - \frac{y^2}{2}\right)^4$

a)

$$\begin{aligned} (a+b)^7 &= \binom{7}{0}a^7 + \binom{7}{1}a^6b^1 + \binom{7}{2}a^5b^2 + \binom{7}{3}a^4b^3 + \binom{7}{4}a^3b^4 + \binom{7}{5}a^2b^5 + \binom{7}{6}ab^6 + \binom{7}{7}b^7 = \\ &= a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (x-y)^5 &= \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4(-y)^1 + \binom{5}{2}x^3(-y)^2 + \binom{5}{3}x^2(-y)^3 + \binom{5}{4}x^1(-y)^4 + \binom{5}{5}(-y)^5 = \\ &= x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5 \end{aligned}$$

c)

$$(1+\sqrt{2})^6 = \binom{6}{0}1^6 + \binom{6}{1}1^5(\sqrt{2})^1 + \binom{6}{2}1^4(\sqrt{2})^2 + \binom{6}{3}1^3(\sqrt{2})^3 + \binom{6}{4}1^2(\sqrt{2})^4 + \binom{6}{5}1^1(\sqrt{2})^5 + \binom{6}{6}(\sqrt{2})^6 =$$

$$= 1 + 6\sqrt{2} + 15 \cdot 2 + 20 \cdot 2\sqrt{2} + 15 \cdot 4 + 6 \cdot 4\sqrt{2} + 8 = 99 + 70\sqrt{2}$$

d)

$$\left(4x - \frac{y^2}{2}\right)^4 =$$

$$= \binom{4}{0}(4x)^4 + \binom{4}{1}(4x)^3\left(-\frac{y^2}{2}\right)^1 + \binom{4}{2}(4x)^2\left(-\frac{y^2}{2}\right)^2 + \binom{4}{3}(4x)\left(-\frac{y^2}{2}\right)^3 + \binom{4}{4}\left(-\frac{y^2}{2}\right)^4 =$$

$$= 256x^4 - 128x^3y^2 + 24x^2y^4 - 3xy^6 + \frac{y^8}{16}$$

**Pedagogická poznámka:** Častou chybou při počítání předchozího příkladu je, že studenti příliš spěchají, snaží se spočítat příklad najednou a tak produkují obrovské množství chyb. Doporučuji počítat příklady tak, jak jsou uvedeny v učebnici, tedy v první fázi jenom dosadit do vzorce a dopočítávání kombinačních čísel, úpravy provádět až poté.

**Př. 5:** Petáková:  
 strana 148/cvičení 76 e) f)  
 strana 148/cvičení 77 a)

**Shrnutí:** Vzorec pro umocnění dvojčlenu  $(a+b)^n$  obsahuje jako koeficienty řadu kombinačních čísel  $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ .