

9.1.12 Permutace s opakováním

Předpoklady: 9105, 9111

Pedagogická poznámka: Pokud necháte studenty počítat samostatně příklad 9 vyjde tato hodina na skoro 80 minut. Uvažuji o tom, že hodinu doplním a rozdělím na dvě.

Př. 1: Urči kolik různých „slov“ je možné vytvořit přemístováním písmen slova KAJAK.

Slovo má 5 písmen \Rightarrow vyrábíme různá pořadí z pěti prvků \Rightarrow permutace (je to i v nadpisu)

Problém: není tak úplně pravda, že máme 5 prvků, protože dvě písmena se ve slově vyskytují dvakrát a jejich prohozením se nic nezmění (a tedy ani nevytvoří nové slovo)

Řešení: písmena ve slově si oindexujeme (pak budou rozlišitelná) $\Rightarrow K_1A_1JA_2K_2 \Rightarrow 5!$ možností.

Jak se počet možností změní, když indexy zrušíme?

- Například slova: $K_1A_1JA_2K_2$ a $K_2A_1JA_2K_1$ budou stejná \Rightarrow ze dvou slov mám jediné. Stejným způsobem se počet slov zmenší i v dalších případech: vzájemné prohození písmen K_1 a K_2 nezpůsobí vznik nového slova \Rightarrow po zrušení indexů u K_1 a K_2 se počet slov zmenší na polovinu
- Stejně dopadneme, když zrušíme indexy u písmen A_1 a A_2 : existují dvě možnosti, jak tyto písmena navzájem prohazovat \Rightarrow počet slov se opět zmenší na polovinu

Celkový počet možností: $\frac{5!}{2 \cdot 2}$.

Pedagogická poznámka: První příklad je potřeba se studenty vyřešit, další již zvládají bez potíží sami.

Př. 2: Kolik různých čtyřmístných čísel je možné z jeho cifer vytvořit z cifer čísla 1211? Výsledek urči analogicky s předchozím příkladem a zkontroluj ještě libovolnou další metodou.

Analogicky s předchozím příkladem:

čtyřmístné číslo = uspořádaná čtveřice ze čtyř cifer $\Rightarrow 4!$ možností

tři cifry jsou stejné (jedničky) \Rightarrow jejich prohazování ($3!$ možností) získává stejná čísla \Rightarrow čísel je $3!$ krát méně než kdyby byly cifry různé \Rightarrow

celkem $\frac{4!}{3!} = 4$ možnosti

Jiná metoda:

číslo vytvořím, jakmile se rozhodnu na kterou pozici umístím 2 (zbytek doplním jedničkami) \Rightarrow čtyřmístné číslo \Rightarrow čtyři možnosti, jak umístit cifru 2 $\Rightarrow 4$ možnosti

Př. 3: Kolika způsoby je možné rozdělit mezi deset dětí pět jablek, dvě hrušky a tři banány tak, aby každé dítě dostalo jeden kus ovoce.

děti máme postavené do řady \Rightarrow musíme postavit do řady deset kusů ovoce, abychom přiřadili dětem jejich ovoce

seřazujeme 10 kusů ovoce $\Rightarrow 10!$ možností

prohazováním pěti jablek mezi sebou se výsledné rozdělení ovoce nezmění \Rightarrow počet výsledků se zmenší $5!$ krát

prohazováním dvou hrušek mezi sebou se výsledné rozdělení ovoce nezmění \Rightarrow počet výsledků se zmenší $2!$ krát

prohazováním tří banánů mezi sebou se výsledné rozdělení ovoce nezmění \Rightarrow počet výsledků se zmenší $3!$ krát

\Rightarrow celkový počet možností: $\frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!}$

Všechny předchozí příklady mají hodně společného:

- máme n různých prvků
- z nich sestavujeme uspořádanou k -tici ($k \geq n$, protože některé prvky se mohou opakovat)
- záleží na pořadí
- **některé prvky se mohou opakovat**

$\Rightarrow k$ -tice, které jsme sestavovali se nazývají **permutace s opakováním**

Permutace s opakováním z n prvků je uspořádaná k -tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje alespoň jednou.

Při sestavování k -tice potřebujeme vědět, kolikrát se který prvek bude opakovat. Počet opakování jednotlivých prvků si označujeme čísly $k_1; k_2; \dots; k_n$.

Př. 4: Urči konkrétní hodnoty proměnných $n, k, k_1; k_2; \dots; k_n$ ve třetím příkladu. Co platí pro čísla $k, k_1; k_2; \dots; k_n$?

rozdávali jsme tři druhy ovoce $\Rightarrow n = 3$

rozdávali jsme deset kusů ovoce $\Rightarrow k = 10$

rozdávali jsme pět jablek $\Rightarrow k_1 = 5$

rozdávali jsme dvě hrušky $\Rightarrow k_2 = 2$

rozdávali jsme tři banány $\Rightarrow k_3 = k_n = 3$

Platí: $5 + 2 + 3 = 10$, počet kusů ovoce, které jsme rozdávali, získáme tím, že sečteme počet jablek, hrušek a banánů dohromady.

obecně zřejmě platí: $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je podle mého názoru nutný. Samostatně ho vyřeší maximálně třetina nejlepších, ostatní mají problémy s určením n, k a samozřejmě k_n . Vyřešení následujícího příkladu je pak pro ně snadné a mohou pochopit předchozí definici.

Př. 5: Urči konkrétní hodnoty proměnných $n, k, k_1; k_2; \dots; k_n$ v prvním příkladu. Ověř platnost vztahu $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$?

ve slově KAJAK jsou tři různá písmena $\Rightarrow n = 3$

slovo KAJAK má pět písmen $\Rightarrow k = 5$

písmeno K je ve slově KAJAK dvakrát $\Rightarrow k_1 = 2$

písmeno A je ve slově KAJAK dvakrát $\Rightarrow k_2 = 2$

písmeno J je ve slově KAJAK jednou $\Rightarrow k_3 = 1$

Platí: $2 + 2 + 1 = 5$, počet písmen ve slově KAJAK získáme tím, že sečteme kolikrát je ve slově písmeno K, A a J.

Počet k -členných permutací s opakováním z n prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují $k_1; k_2; \dots; k_n$ -krát značíme $P'(k_1; k_2; \dots; k_n)$.

Př. 6: Urči počet k -členných permutací s opakováním z n prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují $k_1; k_2; \dots; k_n$ -krát.

Celkem máme $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ prvků, které uspořádáváme $\Rightarrow (k_1 + k_2 + \dots + k_n)!$ možností
Nyní musíme dělit pro každý prvek počtem možností, kterými můžeme prohazovat jeho výskyty:

prvek 1 se vyskytuje k_1 -krát $\Rightarrow k_1!$ možností, jak tyto prvky prohazovat

prvek 2 se vyskytuje k_2 -krát $\Rightarrow k_2!$ možností, jak tyto prvky prohazovat

...

prvek n se vyskytuje k_n -krát $\Rightarrow k_n!$ možností, jak tyto prvky prohazovat

\Rightarrow celkem $\frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$ možností

Pedagogická poznámka: Studentům, kteří mají se sestavením vzorce problému, většinou stačí připomenout, aby si na papír napsali řešení příkladu 3. Většina studentů píše vzorec ve tvaru $\frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$, který je samozřejmě také správný, ale v tabulkách se nepoužívá. Na požádání pro ně není problém přepsat vzorec tak, aby se v něm k nevyskytovalo.

Počet $P'(k_1; k_2; \dots; k_n)$ permutací s opakováním z n prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují $k_1; k_2; \dots; k_n$ -krát, je $P'(k_1; k_2; \dots; k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$

Př. 7: Kolika způsoby je možné mezi 30 studentů rozdat dvě volné vstupenky na koncert, pět vstupenek na plavecký stadión a deset vstupenek do posilovny, pokud každý ze studentů může dostat maximálně jednu vstupenku (i tak jich bude málo)?

Problém: podobné zadání jako v příkladu 3, ale máme málo lístků, na některé studenty nic nezbude \Rightarrow aby nebyli smutní dostanou prázdné papírky \Rightarrow vyřešeno
rozdáváme: 2 vstupenky na koncert, 5 lístků do bazénu, 10 lístků do posilovny a 13 prázdných lístků: $\frac{30!}{2! \cdot 5! \cdot 10! \cdot 13!}$ možností

Pedagogická poznámka: Kromě menšiny, která dokáže příklad vyřešit samostatně, se objevují dvě špatná řešení. První mají vzorec $\frac{17!}{2! \cdot 5! \cdot 10!}$ (těm připomínám, že

studentů bylo 30 a ne 17), druzí pak $\frac{30!}{2! \cdot 5! \cdot 10!}$ (ty upozorňuji, že jejich řešení

neodpovídá vzorci pro počet permutací s opakováním, protože součet čísel ve jmenovateli se nerovná číslu v čitateli).

Při společné opravě na tabuli vyjdeme se vzorce $\frac{17!}{2! \cdot 5! \cdot 10!}$ a doplníme ho na

správný výběrem 17 studentů, kteří dostanou nějaký lístek - $\binom{30}{17}$ možností \Rightarrow

správný výsledek $\binom{30}{17} \frac{17!}{2! \cdot 5! \cdot 10!}$, upravíme

$\binom{30}{17} \frac{17!}{2! \cdot 5! \cdot 10!} = \frac{30!}{17 \cdot 13!} \cdot \frac{17!}{2! \cdot 5! \cdot 10!} = \frac{30!}{2! \cdot 5! \cdot 10! \cdot 13!}$ a pak přemýšlíme o významu

členu 13! ve jmenovateli

Př. 8: Je všeobecně známo, že nejúčinnějším zaklínadlem je formule ABRAKADABRA. Urči:

- počet všech způsobů, jimiž lze přemístit písmena slova ABRAKADABRA a splést zaklínadlo.
- počet všech způsobů, jimiž lze přemístit písmena tak, aby žádná pětice sousedních písmen nebyla tvořena pěti písmeny A
- počet všech způsobů, jimiž lze přemístit písmena tak, aby žádná dvojice sousedních písmen nebyla tvořena dvěma písmeny A

Spočteme si, kolik písmen slovo obsahuje.

A 5x
B 2x
R 2x
K 1x
D 1x

Možnosti přemístění: $\frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!}$

a) žádná pětice sousedních písmen není tvořena pěti písmeny A
všechna písmena A nesmí být vedle sebe \Rightarrow mnoho různých možností \Rightarrow snáz by se počítalo, kdy jsou všechna vedle sebe \Rightarrow odečtu to od všechmožností
všechna A vedle sebe = beru je jako jeden znak \Rightarrow

AAAAA 1x
B 2x
R 2x
K 1x
D 1x

$\Rightarrow \frac{7!}{2! \cdot 2!}$

všechna A nesmí být vedle sebe: $\frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2!} - \frac{7!}{2! \cdot 2!}$

b) žádná dvojice sousedních písmen není tvořena dvěma písmeny A
dvě písmena A nesmí být vedle sebe \Rightarrow písmena A musím od sebe oddělovat pomocí
zbývajících písmen, které mám k dispozici:

$\square B \square R \square K \square D \square B \square R \square$ máme šest zbývajících písmen \Rightarrow existuje sedm míst (prázdné
čtverečky), do kterých můžeme napsat jedno z pěti písmen A $\Rightarrow \binom{7}{5}$ možností jak napsat
písmena A

ještě můžeme prohazovat souhlásky: $\frac{6!}{2! \cdot 2!}$ možností

ke každému rozmístění písmen A můžeme vystřídat všechny kombinace souhlásek \Rightarrow
možnosti kombinujeme \Rightarrow celkem $\binom{7}{5} \frac{6!}{2! \cdot 2!}$ možností

Pedagogická poznámka: Bod a) předchozího příkladu spočítají všichni, bod b) jen menšina

(často se vyskytující chybou je výsledek $\frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2!} - 7$, ve kterém studenti uvažují

pouze nad tím, kolik mají možností umístit mezi souhlásky spojené AAAAA a
zapomínají, že mohou prohazovat mezi sebou také souhlásky. Bod c) přesahuje
možnosti všech studentů, nemá tedy cenu příliš dlouho čekat a řešení zveřejňuji
poměrně brzo.

Př. 9: Urči počet všech čtyřciferných přirozených čísel dělitelných devíti v jejichž zápisu se
vyskytují pouze číslice 0, 2, 3, 5, 6.

Číslo je dělitelné devíti, právě když je ciferný součet dělitelný devíti \Rightarrow nejdříve si zjistíme,
jak ze zadaných číslic sestavit správný ciferný součet a pak zjistíme kolik čísel je možné
z každého takového seskupení sestavit.

ciferný součet 9:

- $6+3+0+0=9 \Rightarrow$ sestavujeme z číslic 6, 3, 0, 0 $\Rightarrow \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!}$ možností, ale na
začátku nesmí být nula \Rightarrow odečítáme $\frac{2 \cdot 3!}{2} = 3!$ možností (na začátku 0 (můžeme
vybrat dvakrát) a další tři číslice můžeme uspořádat libovolně, počet možností dělíme
dvěma, protože prohozením nul se nic nezmění) \Rightarrow celkově $\frac{4!}{2!} - 3! = 6$ možností
- $5+2+2+0=9 \Rightarrow$ sestavujeme z číslic 5, 2, 2, 0 $\Rightarrow \frac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 1!}$ možností, ale na
začátku nesmí být nula \Rightarrow odečítáme $\frac{3!}{2!}$ možností (počet uspořádání číslic 5, 2, 2, 0
s nulou na začátku) \Rightarrow celkově $\frac{4!}{2!} - \frac{3!}{2!} = 9$ možností

- $3+3+3+0=9 \Rightarrow$ sestavujeme z číslic 3, 3, 3, 0 $\Rightarrow \frac{4!}{3! \cdot 1!}$ možností, ale na začátku nesmí být nula \Rightarrow odečítáme 1 možnost (nulou na začátku a tři trojky za ní) \Rightarrow celkově $\frac{4!}{3! \cdot 1!} - 1 = 3$ možnosti
- $3+2+2+2=9 \Rightarrow$ sestavujeme z číslic 3, 2, 2, 2 $\Rightarrow \frac{4!}{3! \cdot 1!}$ možností, mezi čísly není nula \Rightarrow nic neodečítáme \Rightarrow celkově $\frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$ možnosti

ciferný součet 18:

- $6+6+6+0=18 \Rightarrow$ sestavujeme z číslic 6, 6, 6, 0 $\Rightarrow \frac{4!}{3! \cdot 1!}$ možností, ale na začátku nesmí být nula \Rightarrow odečítáme 1 možnost (nulou na začátku a tři šestky za ní) \Rightarrow celkově $\frac{4!}{3! \cdot 1!} - 1 = 3$ možnosti
- $6+6+3+3=18 \Rightarrow$ sestavujeme z číslic 6, 6, 3, 3 $\Rightarrow \frac{4!}{2! \cdot 2!}$ možností, mezi čísly není nula \Rightarrow nic neodečítáme \Rightarrow celkově $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ možností
- $6+5+5+2=18 \Rightarrow$ sestavujeme z číslic 6, 5, 5, 2 $\Rightarrow \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!}$ možností, mezi čísly není nula \Rightarrow nic neodečítáme \Rightarrow celkově $\frac{4!}{2!} = 12$ možností
- $5+5+5+3=18 \Rightarrow$ sestavujeme z číslic 5, 5, 5, 3 $\Rightarrow \frac{4!}{3! \cdot 1!}$ možností, mezi čísly není nula \Rightarrow nic neodečítáme \Rightarrow celkově $\frac{4!}{3!} = 4$ možnosti

Dohromady máme $6+9+3+4+3+6+12+4 = 47$ možností jak sestavit čísla tak, aby bylo dělitelné devíti

Na závěr si zkusíme spočítat $P'(k, n-k) = \frac{[k+(n-k)]!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k} = K_k(n)$. Tedy počet permutací s opakováním ze dvou prvků, z nichž jeden se opakuje k -krát a druhý $(n-k)$ -krát je stejný jako počet k -prvkových kombinací z n prvků.

Př. 10: (BONUS) Najdi kombinatorické zdůvodnění vzorce $P'(k, n-k) = K_k(n)$.

Vytváření k -prvkové kombinace z n prvků si můžeme představit takto: máme n prvků a tedy $n!$ možností jak se postavit do řady, prvních k pozic v této řadě, znamená, že prvek je vybrán do kombinace, zbývajících $(n-k)$ prvků znamená, že prvek vybrán nebyl \Rightarrow pokud nás zajímá výsledek výběru do kombinace, musíme počet $n!$ možností postavení do řady vydělit:

$k!$ možností, jak proházet mezi sebou prvky na prvních k místech (jejich proházení neovlivní výběr do kombinace)

$(n - k)!$ možností, jak proházet mezi sebou prvky na zbývajících $(n - k)$ místech (jejich proházení neovlivní výběr do kombinace)

\Rightarrow celkem $\frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$ možností, jak sestavit kombinaci

Př. 11: Petáková:
strana 148/cvičení 73

Shrnutí: