9.1.9 Úlohy s faktoriály a kombinačními čísly

Př. 1: Porovnej čísla: $100!+101!$ a $99!+102!$

$100!+101! = 99!\cdot 100 + 99!\cdot 100\cdot 101 = 99!\cdot(100+100\cdot 101)$

$99!+102! = 99!+99!\cdot 100\cdot 101\cdot 102 = 99!(1+100\cdot 101\cdot 102)$

$100+100\cdot 101 = 10200$
$1+100\cdot 101\cdot 102 = 1030201$

Př. 2: Spočítej s pomocí kalkulačky: $\binom{1500}{3}$.

$\binom{1500}{3} = \frac{1500!}{1497!\cdot 3!}$ - tento tvar nemůžeme použít protože kalkulačka nespočítá $1500!$ $\Rightarrow$ zkrátíme ve výrazu vše, co půjde. aby kalkulačka počítala s menším číslem:

$\binom{1500}{3} = \frac{1500!}{1497!\cdot 3!} = \frac{1500\cdot 1499\cdot 1498\cdot 1497!}{1497!\cdot 3!} = \frac{1500\cdot 1499\cdot 1498}{3\cdot 2\cdot 1} = 561375500$

Př. 3: Kolika nulami končí zápis čísla $80!$?

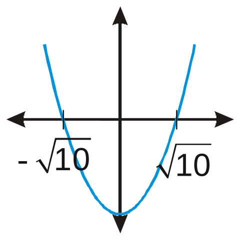
$80! = 80\cdot 79\cdot ...\cdot 3\cdot 2\cdot 1$
Celkový počet nul: $8+8+3=19$
Zápis čísla $80!$ končí na 19 nul.
Správnost předchozího výsledku si můžeme ověřit pomocí počítače, výpočtem faktoriálu:
$80! = 71569457046263802294811533723186532165584657342365752577109445058227039255480148842668944867280814080000000000000000000$

Př. 4: Vyřeš rovnici $(n+1)! = 42(n-1)!$

podmínky: $n+1 \geq 0$, $n-1 \geq 0$ $\Rightarrow$ $n \geq 1$
$(n+1)n(n-1)! = 42(n-1)!$ $\quad / :(n-1)!$ - $(n-1)!$ je určitě kladné číslo $\Rightarrow$ můžeme dělit
$n^2+n-42=0$
$(n+7)(n-6)=0 \qquad K=\{6\}$

Př. 5: Vyřeš nerovnici $9n!+3(n+1)! \geq (n+2)!$

podmínky: $n \geq 0$, $n+1 \geq 0$, $n+2 \geq 0$ $\Rightarrow$ $n \geq 0$
$9n!+3(n+1)\cdot n! \geq (n+2)(n+1)\cdot n!$
$3n+12 \geq n^2+2n+n+2$
$0 \geq n^2-10$
$0 \geq \left(n+\sqrt{10}\right)\left(n-\sqrt{10}\right)$ $\Rightarrow$ kvadratická nerovnice v součinovém tvaru
před n je kladné číslo $\Rightarrow$ „ďolík“, průsečíky v bodech $-\sqrt{10}$ a $\sqrt{10}$



Hledáme části grafu pod osou $\Rightarrow$ řešení v reálných číslech $\left\langle -\sqrt{10};\sqrt{10}\right\rangle$.

Řešíme nerovnici pouze v přirozených číslech $\Rightarrow$ $K=\{1;2;3\}$

Př. 6: Vyřeš rovnici $\binom{x}{x-2}-\binom{x+1}{x}=4$.

musí splňovat podmínky: $x\geq 0$, $x-2\geq 0$ $\Rightarrow x\geq 2$

$$\binom{x}{x-2}-\binom{x+1}{x}=4$$

nahradíme kombinační čísla faktoriály $\dfrac{x!}{(x-2)!\cdot 2!}-\dfrac{(x+1)!}{(x+1-1)!\cdot 1!}=4$

$$\frac{x(x-1)}{2}-(x+1)=4$$

$$x^2-3x-10=0$$

$(x-5)(x+2)=0$ $\qquad K=\{5\}$

Př. 7: Vyřeš nerovnici $\binom{9}{x+1}<2\binom{9}{x}$.

$$\frac{9!}{(9-[x+1])!\cdot(x+1)!}<2\frac{9!}{(9-x)!\cdot x!}$$

$$\frac{9!}{(8-x)!\cdot(x+1)!}<2\frac{9!}{(9-x)!\cdot x!}$$

podmínky: $8-x\geq 0\Rightarrow x\leq 8$, $x\geq 0$, $x+1\geq 0\Rightarrow x\geq -1$

$(9-x)!\cdot x!<2(8-x)!\cdot(x+1)!$ $\qquad$ rozepíšeme faktoriály: $(9-x)!=(9-x)\cdot(8-x)!$

$$(9-x)(8-x)!\cdot x!<2(8-x)!\cdot(x+1)x!$$

$$(9-x)<2(x+1)$$

$\dfrac{7}{3}<x$ $\qquad$ řešením mohou být podle podmínek pouze celá čísla v intervalu $\langle 0;8\rangle$

$\Rightarrow$ $K=\{3;4;5;6;7;8\}$

Př. 8: Petáková:

strana 141/cvičení 5 d)
strana 141/cvičení 7 a)
strana 141/cvičení 9 a)
strana 142/cvičení 13 b)
strana 143/cvičení 25 c) e)
strana 143/cvičení 28 d)
strana 144/cvičení 30 a)