9.1.9 Úlohy s faktoriály a kombinačními čísly

Předpoklady: 9103, 9105, 9107, 9108

Př. 1: Porovnej čísla: $100!+101!$ a $99!+102!$

Žádný z faktoriálů nejde spočíst pomocí kalkulačky (math error = příliš velká čísla)
$\Rightarrow$ musíme čísla upravit tak, abychom neporovnávali celé hodnoty faktoriálů
nejmenší faktoriál $99!$ $\Rightarrow$ upravíme všechny faktoriály pomocí $99!$

$100!+101!=99!\cdot 100+99!\cdot 100\cdot 101=99!\cdot\left(100+100\cdot 101\right)$

$99!+102!=99!+99!\cdot 100\cdot 101\cdot 102=99!\left(1+100\cdot 101\cdot 102\right)$

Nyní stačí porovnat čísla v závorkách, větší číslo v závorce znamená větší hodnotu celého výrazu:
$100+100\cdot 101=10200$
$1+100\cdot 101\cdot 102=1030201$
$\Rightarrow$ číslo $99!+102!$ je větší než číslo $100!+101!$.

Př. 2: Spočítej s pomocí kalkulačky: $\binom{1500}{3}$.

$\binom{1500}{3}=\frac{1500!}{1497!\cdot 3!}$ - tento tvar nemůžeme použít protože kalkulačka nespočítá $1500!$ $\Rightarrow$ zkrátíme ve výrazu vše, co půjde. aby kalkulačka počítala s menším číslem:

$$\binom{1500}{3}=\frac{1500!}{1497!\cdot 3!}=\frac{1500\cdot 1499\cdot 1498\cdot 1497!}{1497!\cdot 3!}=\frac{1500\cdot 1499\cdot 1498}{3\cdot 2\cdot 1}=561375500$$

Pedagogická poznámka: Užitečné příklady. Vyvrací standardní studentskou představu, že s kalkulačkou automaticky spočítají všechno.

Př. 3: Kolika nulami končí zápis čísla $80!$?

$80!=80\cdot 79\cdot ...\cdot 3\cdot 2\cdot 1$
Jak vznikají ve výsledném čísle nuly na konci?

- v součinu se vyskytuje násobek 10 $\Rightarrow$ v součinu pro číslo $80!$ je takových čísel 8 (10 až 80) $\Rightarrow$ 8 nul
- v součinu se vyskytne 5 a 2 (těch je v součinu určitě víc než 5) $\Rightarrow$ čísel dělitelných 5 a nedělitelných 10 (ty už jsme započítali) $\Rightarrow$ 8 takových čísel $5,15,25,...$
- číslo je násobkem druhé mocniny 5 $\Rightarrow$ obsahuje dvě 5, ale započítaná je pouze 1 (kvůli tomu, že jde o násobek 5), taková čísla jsou 3 (25, 50, 75)

Celkový počet nul: $8+8+3=19$
Zápis čísla $80!$ končí na 19 nul.

Správnost předchozího výsledku si můžeme ověřit pomocí počítače, výpočtem faktoriálu:
$80!=7156945704626380229481153372318653216558465734236575257710944505822$
$7039255480148842668944867280814080000000000000000000$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad patří mezi velmi zajímavé. Ještě jsem nepotkal studenta, který by ho vypočítal správně. Studenti, kteří příklad „vyřeší" spočítají, že číslo bude mít 16 nul (8+8, a na druhé mocniny zapomenou). Příklad si zkontrolujeme a pak vyhlásíme honbu na chybu. Tento okamžik pak určitě patří mezi ty, kdy se studenti opravdu snaží.

Př. 4: Vyřeš rovnici $(n+1)!=42(n-1)!$

podmínky: $n+1\geq 0$, $n-1\geq 0 \Rightarrow n\geq 1$

$(n+1)!=42(n-1)!$

$(n+1)n(n-1)!=42(n-1)! \quad /:(n-1)!$ - $(n-1)!$ je určitě kladné číslo $\Rightarrow$ můžeme dělit

$(n+1)n=42$

$n^2+n-42=0$

$(n+7)(n-6)=0$

$n_1=6$ - vyhovuje podmínce $\Rightarrow$ je řešením

$n_2=-7$ - nevyhovuje podmínce

$K=\{6\}$

Př. 5: Vyřeš nerovnici $9n!+3(n+1)!\geq(n+2)!$

podmínky: $n\geq 0$, $n+1\geq 0$, $n+2\geq 0 \Rightarrow n\geq 0$

$9n!+3(n+1)!\geq(n+2)!$

$9n!+3(n+1)\cdot n!\geq(n+2)(n+1)\cdot n!$

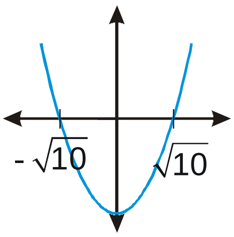
$n![9+3(n+1)]\geq(n+2)(n+1)\cdot n! \quad /:n!$ - $n!$ je určitě kladné číslo $\Rightarrow$ můžeme dělit

$3n+12\geq n^2+2n+n+2$

$0\geq n^2-10$

$0\geq\left(n+\sqrt{10}\right)\left(n-\sqrt{10}\right)$ $\Rightarrow$ kvadratická nerovnice v součinovém tvaru

před n je kladné číslo $\Rightarrow$ „ďolík", průsečíky v bodech $-\sqrt{10}$ a $\sqrt{10}$



Hledáme části grafu pod osou $\Rightarrow$ řešení v reálných číslech $\left\langle-\sqrt{10};\sqrt{10}\right\rangle$.

Řešíme nerovnici pouze v přirozených číslech $\Rightarrow$ $K=\{1;2;3\}$

Pedagogická poznámka: Zde se projevuje stará bolest – největší problémy mají studenti s vyřešením kvadratické nerovnice v závěru příkladu.

Př. 6: Vyřeš rovnici $\binom{x}{x-2}-\binom{x+1}{x}=4$.

Neznámá se vyskytuje v kombinačním čísle $\Rightarrow$
musí splňovat podmínky: $x \geq 0$, $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

$$\binom{x}{x-2}-\binom{x+1}{x}=4$$

nahradíme kombinační čísla faktoriály $\frac{x!}{(x-2)!\cdot 2!}-\frac{(x+1)!}{(x+1-1)!\cdot 1!}=4$

$$\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)!}{(x-2)!\cdot 2}-\frac{(x+1)\cdot x!}{x!}=4$$

$$\frac{x(x-1)}{2}-(x+1)=4$$

$$x^2-x-2x-2=8$$

$$x^2-3x-10=0$$

$$(x-5)(x+2)=0$$

$x_1=5$, vyhovuje podmínkám $\Rightarrow$ je kořen

$x_2=-2$, nevyhovuje podmínkám $\Rightarrow$ není kořen

$K=\{5\}$

Př. 7: Vyřeš nerovnici $\binom{9}{x+1}<2\binom{9}{x}$.

neznámá je v kombinačním čísle dole $\Rightarrow$ budeme muset zapsat podmínky
přepíšeme kombinační čísla pomocí faktoriálů:

$$\binom{9}{x+1}<2\binom{9}{x}$$

$$\frac{9!}{(9-[x+1])!\cdot(x+1)!}<2\frac{9!}{(9-x)!\cdot x!}$$

$$\frac{9!}{(8-x)!\cdot(x+1)!}<2\frac{9!}{(9-x)!\cdot x!}$$

faktoriál je definován pouze pro nezáporná celá čísla $\Rightarrow$
podmínky: $8-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 8$, $x \geq 0$, $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$
odstraníme zlomky, všechny faktoriály jsou nezáporná celá čísla $\Rightarrow$ můžeme nerovnici násobit bez obav ztráty kořenů nebo obrácení znaménka

$$\frac{9!}{(8-x)!\cdot(x+1)!}<2\frac{9!}{(9-x)!\cdot x!} \quad /\cdot\frac{(9-x)!\cdot x!\cdot(8-x)!\cdot(x+1)!}{9!}$$

$(9-x)!\cdot x!<2(8-x)!\cdot(x+1)!$ rozepíšeme faktoriály: $(9-x)!=(9-x)\cdot(8-x)!$

$$(9-x)(8-x)!\cdot x!<2(8-x)!\cdot(x+1)x!$$

$$(9-x)<2(x+1)$$

$$9-x<2x+2$$

$7 < 3x$

$\frac{7}{3} < x$ řešením mohou být podle podmínek pouze celá čísla v intervalu $\langle 0;8 \rangle$

$\Rightarrow K = \{3;4;5;6;7;8\}$

Př. 8: Petáková:

strana 141/cvičení 5 d)

strana 141/cvičení 7 a)

strana 141/cvičení 9 a)

strana 142/cvičení 13 b)

strana 143/cvičení 25 c) e)

strana 143/cvičení 28 d)

strana 144/cvičení 30 a)

Shrnutí: