9.1.6 Permutace II

Předpoklady: 9101, 9102, 9105

Př. 1: Zjednoduš a vypočti bez použití kalkulačky:

a) $\frac{8!}{6!}$ b) $\frac{10!}{7\cdot5!\cdot5!}$

a) $\frac{8!}{6!}=\frac{8\cdot7\cdot6!}{6!}=8\cdot7=56$

b) $\frac{10!}{7\cdot5!\cdot5!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5!}{7\cdot5!\cdot5!}=\frac{10\cdot9\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{7}\cdot6}{\cancel{7}\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot3\cdot\cancel{2}\cdot1}=\frac{5\cdot2\cdot9\cdot6}{5\cdot3}=36$

Př. 2: Zjednoduš:

a) $\frac{1}{10!}+\frac{1}{9!}$ b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ c) $\frac{(n-3)!}{(n-1)!}$ d) $\frac{n+1}{n!}-\frac{2n+1}{(n+1)!}$

a) $\frac{1}{10!}+\frac{1}{9!}=\frac{1}{10!}+\frac{10}{10}\cdot\frac{1}{10!}=\frac{1}{10!}+\frac{10}{10!}=\frac{11}{10!}$

b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-1)!}=(n+1)\cdot n=n^2+n$

c) $\frac{(n-3)!}{(n-1)!}=\frac{(n-3)!}{(n-1)(n-2)(n-3)!}=\frac{1}{(n-1)(n-2)}=\frac{1}{n^2-3n+2}$

d) $\frac{n+1}{n!}-\frac{2n+1}{(n+1)!}=\frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)n!}-\frac{2n+1}{(n+1)!}=\frac{n^2+2n+1-2n-1}{(n+1)!}=\frac{n^2}{(n+1)!}$

Faktoriál, který jsme zavedli v minulé hodině, můžeme využít také k přehlednějšímu zápisu variačních čísel.

Zkusíme si upravit třeba $V_4(7)$:

$V_4(7)=7\cdot6\cdot5\cdot4$ - součin připomíná zápis $7!$, ale chybí v něm „konec“ $\Rightarrow$ zkusíme doplnit součin na celý faktoriál vynásobením jedničkou: $V_4(7)=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot\frac{3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1}=\frac{7!}{3!}$.

Proč je v čitateli $7!$, chápeme (počet prvků, ze kterých vybíráme). Proč je ve jmenovateli $3!$?

Př. 3: Vyjádři pomocí faktoriálů variační číslo $V_2(7)$ a navrhni význam čísla, jehož faktoriál se nachází ve jmenovateli zlomku.

Stejně jako před okamžikem:

$V_2(7)=7\cdot6=7\cdot6\cdot\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{7!}{5!}$.

5 ve jmenovateli je zřejmě rozdíl $7-2=5$ (jinak jde o počet prvků, který by nám zbyl do dalšího výběru).

Př. 4: Vyjádři pomocí faktoriálů variační číslo $V_k(n)$.

Stejně jak v předchozím příkladě:

$$V_k(n)=n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot\frac{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}=\frac{n!}{(n-k)!}$$

Počet $V_k(n)$ *k*-členných variací z *n* prvků je $V_k(n)=\frac{n!}{(n-k)!}$.

Př. 5: Urči kolika způsoby může *n* táborníků nastoupit na rozcvičku:
a) do řady
b) do řady na jejímž kraji stojí táborník Vlčí Dráp
c) do řady ve které stojí vedle sebe Vlčí Dráp a Soví Oko
d) do řady ve které stojí vedle sebe trojice táborníků Vlčí Dráp, Soví Oko a Medvědí Tlapa
e) do řady, ve které Vlčí Dráp nestojí vedle Rysího Spáru
f) do kruhu, ve němž záleží pouze na vzájemném umístění táborníků a ne na jejich poloze vzhledem k okolí

a) do řady
vybíráme z *n* prvků postupně *n* za vytváříme uspořádanou *n*-tici $\Rightarrow$ vytváříme permutace z *n* prvků $\Rightarrow$ $n!$ možností

b) do řady na jejímž kraji stojí táborník Vlčí Dráp
nejdříve seřadíme všechny táborníky kromě Vlčího Drápu $\Rightarrow$ řadíme $(n-1)$ táborníků $\Rightarrow$ $(n-1)!$ možností, u každého vytvořené řady můžeme postavit Vlčí Dráp na jeden ze dvou konců $\Rightarrow$ celkově $2(n-1)!$

c) do řady ve které stojí vedle sebe Vlčí Dráp a Soví Oko
první způsob:
Vlčí Dráp a Soví Oko mají být vedle sebe $\Rightarrow$ spojíme je a budeme je do řady zařazovat jako jednu osobu $\Rightarrow$ vytváříme řadu z $n-1$ osob $\Rightarrow$ $(n-1)!$ možností, po rozestavení řady máme ještě dvě možnosti, jak postavit vedle sebe Vlčí Dráp a Soví Oko $\Rightarrow$ $2(n-1)!$ možností
druhý způsob:
Vlčí Dráp a Soví Oko mají být vedle sebe $\Rightarrow$ postavíme řadu z ostatních táborníků $\Rightarrow$ vytváříme řadu z $n-2$ osob $\Rightarrow$ $(n-2)!$ možností, jak rozestav táborníky bez Vlčího Drápu a Sovího Oka, ke každému rozestavení táborníků máme $(n-1)$ možností, kam postavit dvojici Dráp Oko (nalevo od každého z táborníků a pak úplně vpravo) $\Rightarrow$ $(n-1)(n-2)!=(n-1)!$ možností, po rozestavení řady máme ještě dvě možnosti, jak postavit vedle sebe Vlčí Dráp a Soví Oko $\Rightarrow$ $2(n-1)!$ možností

d) do řady ve které stojí vedle sebe trojice táborníků Vlčí Dráp, Soví Oko a Medvědí Tlapa řešíme analogicky jako v předchozím bodě
Vlčí Dráp, Soví Oko a Medvědí Tlapa mají být vedle sebe $\Rightarrow$ spojíme je a budeme je do řady zařazovat jako jednu osobu $\Rightarrow$ vytváříme řadu z $n-2$ osob $\Rightarrow$ $(n-2)!$ možností, na každé rozestavení řady musíme ještě vyzkoušet všechny možností, jak vybrané tři táborníky postavíme vedle sebe ($3!$ možností) $\Rightarrow$ $3!\cdot(n-2)!$ možností

e) do řady, ve které Vlčí Dráp nestojí vedle Rysího Spáru
Vlčí Dráp nestojí vedle Rysího Spáru $\Rightarrow$ hodně možností, které se navzájem liší podle toho, jak jsou táborníci daleko od sebe atd. $\Rightarrow$ místo přímého postupu zkusíme nepřímý = od počtu všech možností seřazení táborníků odečteme možnosti, které nechceme (tedy Vlčí Dráp vedle Rysího Spáru)
všechny možnosti: $n!$
Vlčí Dráp vedle Rysího Spáru: $2(n-1)!$ (stejné jako bod c))
Vlčí Dráp není vedle Rysího Spáru: $n!-2(n-1)!$

e) do kruhu, ve němž záleží pouze na vzájemném umístění táborníků a ne na jejich poloze vzhledem k okolí
kruh vytvoříme z uspořádané řady tím, že se krajní táborníci postaví k sobě. Když kruh pootočíme odpovídá jiné řadě, ale z hlediska zadání jde pořád o stejný kruh
1 2 3 4   2 3 4 1   3 4 1 2   4 1 2 3

Kolikrát můžeme kruh otočit? n-krát $\Rightarrow$ možných kruhů je n-krát méně než řad, tedy
$\frac{n!}{n}=(n-1)!$

Pedagogická poznámka: Ve třídě je rozhodně jednodušší vybrat tři studenty, sestavit kolo a ukázat, jak se z jednoho kola otáčením vytváření různé řady, než něco nesrozumitelně kreslit na tabuli.

Př. 6: Petáková:
strana 146/cvičení 49
strana 146/cvičení 50
strana 146/cvičení 51

Shrnutí: