9.1.4 Variace II

Předpoklady: 9101, 9102

Př. 1: Vyřeš rovnici $V_3(n) - V_3(n-1) = 216$.

Dosadíme z definice variačního čísla a vyřešíme rovnici:

$V_3(n) - V_3(n-1) = 216$

$n(n-1)(n-2) - (n-1)(n-2)(n-3) = 216$

$(n^2 - n)(n-2) - (n^2 - 2n - n + 2)(n-3) = 216$

$(n^2 - n)(n-2) - (n^2 - 3n + 2)(n-3) = 216$

$\left[n^3 - 2n^2 - n^2 + 2n\right] - \left[n^3 - 3n^2 - 3n^2 + 9n + 2n - 6\right] = 216$

$n^3 - 3n^2 + 2n - \left[n^3 - 6n^2 + 11n - 6\right] = 216$

$3n^2 - 9n - 210 = 0 \qquad / :3$

$n^2 - 3n - 70 = 0$

$(n-10)(n+7) = 0$

$n_1 = 10$

$n_2 = -7$ - není řešením rovnice, nemůžeme z –7 prvků

$K = \{10\}$

Př. 2: Zvětší-li se počet prvků o 2, zvětší se počet variací druhé třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků o 22. Urči původní počet prvků?

Původní počet prvků: n

$V(2;n) = n \cdot (n-1)$

$V(2;n+2) = (n+2) \cdot (n+1)$

Počet variací se zvětší o 22: $V(2;n+2) - V(2;n) = (n+2)\cdot(n+1) - n\cdot(n-1) = 22$

$n^2 + 2n + n + 2 - n^2 + n = 22$

$4n = 20$

$n = 5$

Původně jsme měli 5 prvků.

Vrátíme se k příkladům.

Př. 3: Urči kolik různých přirozených čtyřciferných čísel je možné sestavit z čísel 1, 2, 3, 4 a 5.
a) Kolik z nich je dělitelných pěti?
b) Kolik z nich je sudých?
c) Kolik z nich je dělitelných třemi?
d) Kolik z nich je dělitelných šesti?

počet všech čísel:
sestavujeme uspořádané čtveřice, vybíráme z pěti prvků $\Rightarrow$ $V_4(5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ možností
(výsledný výraz můžeme odůvodnit i klasickým: na první místo 5 možností, na druhé místo 4 možnosti, …)

a) Kolik z nich je dělitelných pěti?
číslo je dělitelné pěti, když končí na 5 nebo 0 (to v našem příkladě nepřipadá do úvahy)
vybíráme pouze na první tří místa ze zbývajících číslic $\Rightarrow$ $V_3(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2$

b) Kolik z nich je sudých?
sudé číslo $\Rightarrow$ číslo musí končit na sudou číslici, ostatní číslice volíme stejně jako na začátku příkazu

- čísla končící na 2 $\Rightarrow$ vybíráme pouze na první tří místa ze zbývajících čtyř číslic $\Rightarrow$ $V_3(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2$
- čísla končící na 4 $\Rightarrow$ vybíráme pouze na první tří místa ze zbývajících čtyř číslic $\Rightarrow$ $V_3(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2$

sudá čísla mohou končit buď na 2 nebo na 4 $\Rightarrow$ celkový počet možností získáme součtem možností končících na 2 nebo 4 $\Rightarrow$ celkem $4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ možností

c) Kolik z nich je dělitelných třemi?
číslo je dělitelné třemi, právě když je jeho ciferný součet dělitelný třemi právě, když je jeho ciferný součet dělitelný třemi $\Rightarrow$ čísla můžeme sestavovat pouze z číslic 1, 2, 4 a 5 (ciferný součet 12)
sestavujeme uspořádané čtveřice, vybíráme ze čtyř prvků $\Rightarrow$ $V_4(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ možností

d) Kolik z nich je dělitelných šesti?
číslo je dělitelné šesti právě, když je dělitelné třemi a dvěma najednou $\Rightarrow$ čísla sestavujeme pouze z číslic 1, 2, 4 a 5 (ciferný součet 12, dělitelnost třemi) a musí končit na 2 nebo 4 (dělitelnost 2)

- čísla končící na 2 $\Rightarrow$ vybíráme pouze na první tří místa ze zbývajících tří číslic $\Rightarrow$ $V_3(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1$
- čísla končící na 4 $\Rightarrow$ vybíráme pouze na první tří místa ze zbývajících čtyř číslic $\Rightarrow$ $V_3(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1$

celkem $3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Př. 4: Urči počet všech sudých pětimístných přirozených čísel s různými ciframi. Je jich stejně jako lichých?

Čísla sestavujeme ze všech deseti číslic. Sudá čísla končí na sudou číslici, nemůžeme řešit všechny možnosti najednou, protože na první místo čísla nemůžeme dát nulu.

- čísla končící na 0 $\Rightarrow$ vybíráme pouze na první čtyři místa ze zbývajících devíti číslic (použít můžeme každé z nich, protože nula je na posledním místě) $\Rightarrow$ $V_4(9) = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$
- čísla končící na 2 $\Rightarrow$ vybíráme pouze na první čtyři místa ze zbývajících devíti číslic, ale na první místo máme pouze osm možností (nejde použít nula) $\Rightarrow$ $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$
- stejný počet možností máme i u dalších sudých čísel 4, 6, 8

čísla končící na nulu $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$, čísla končící na zbývající sudé číslice: $4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$
Celkem: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

Př. 5: Petáková:
strana 146/cvičení 37
strana 146/cvičení 38
strana 146/cvičení 40

Shrnutí: