9.1.2 Základní kombinatorická pravidla II

Předpoklady: 9101

Pedagogická poznámka: V kombinatorice více než v jiných částech matematiky platí, že postup studentů je velmi různý. Přesto se snažím pomalejší příliš nehonit (aby jenom neopisovali) a trvám jen na tom, aby počítali hlavně klíčové příklady (v této hodině 1, 5, 8), na kterých vždy synchronizuji celou třídu.

Př. 1: Urči počet přirozených dvojciferných čísel s různými ciframi:
a) pomocí pravidla kombinatorického součinu
b) pomocí pravidla kombinatorického součtu

a) pomocí pravidla kombinatorického součinu
Sestavujeme uspořádané dvojice:
1. cifra: 9 možností (nemůže tam být nula, zatím nejsme nijak omezeni)
2. cifra: 9 možností (můžeme použít nulu, ale nemůžeme použít číslici vybranou na první místo)
Celkově čísel: $9 \cdot 9 = 81$

b) pomocí pravidla kombinatorického součtu
dvojciferná čísla = dvojciferná čísla s různými ciframi + dvojciferná čísla se stejnými ciframi
počet dvojciferných čísel: 90
počet dvojciferných čísel se stejnými ciframi: 9 (11, 22, …, 99)
dosadíme: počet dvojciferných čísel s různými ciframi = $90 - 9 = 81$

Př. 2: Ve třídě je 17 děvčat a 13 kluků. Urči, kolika způsoby je možné zvolit ze studentů třídy předsedu a místopředsedu?

U volby předsedy a místopředsedy není důležité pohlaví $\Rightarrow$ mám 30 studentů
Předseda: 30 možností
Místopředseda : 29 možností (předseda už nemůže být zvolen)
Celkem možností: $30 \cdot 29 = 870$

Př. 3: Ve třídě je 17 děvčat a 13 kluků. Vysvětli, jak popisuje výběr předsedy a místopředsedy tento vztah: $17 \cdot 16 + 17 \cdot 13 + 13 \cdot 17 + 13 \cdot 12 = 870$

Vybíráme ze 17 holek $\Rightarrow$ první část $17 \cdot 16$ počet možností jak vybrat předsedu i místopředsedu pouze z holek
Vybíráme ze 13 kluků $\Rightarrow$ poslední část $13 \cdot 12$ počet možností jak vybrat předsedu i místopředsedu pouze z kluků
$17 \cdot 13$ - předseda holka, místopředseda kluk
$13 \cdot 17$ - předseda kluk, místopředseda holka
Vztah vyjadřuje počet možností tím, že je rozdělil podle pohlaví

Př. 4: Spočti počet tříciferných čísel s různými ciframi „sestavováním odzadu“ (tím, že začneme hledat nejdříve poslední cifru). Využij kombinatorické pravidlo součtu.

Problém špatného výrazu $8 \cdot 9 \cdot 10$ - nevyřadili jsme 0 z prvního místa, protože nevíme, zda jsme nulu použili u dalších cifer nebo ne.
Číslo můžeme sestavit třemi způsoby:
0 je třetí cifrou: $\Rightarrow$ možnosti:
3. cifra: 1. možnost (nula)
2. cifra: 9 možností (vše kromě nuly)
1. cifra: 8 možností (vše kromě nuly a číslice na druhém místě)
$\Rightarrow$ celkem: $8 \cdot 9 \cdot 1$ možností

0 je druhou cifrou: $\Rightarrow$ možnosti:
3. cifra: 9 možností (vše kromě nuly)
2. cifra: 1. možnost (nula)
1. cifra: 8 možností (vše kromě nuly a číslice na třetím místě)
$\Rightarrow$ celkem: $8 \cdot 1 \cdot 9$ možností

0 není ani třetí ani druhou cifrou ($\Rightarrow$ číslo ji neobsahuje)
3. cifra: 9 možností (vše kromě nuly)
2. cifra: 8 možností (vše kromě nuly a číslice na třetím místě)
1. cifra: 7 možností (vše kromě nuly a číslic na třetím a druhém místě)
$\Rightarrow$ celkem: $7 \cdot 8 \cdot 9$ možností

Celkově možností: $8 \cdot 9 \cdot 1 + 8 \cdot 1 \cdot 9 + 7 \cdot 8 \cdot 9 = 648$

Př. 5: V rovině je dáno *n* bodů ($n \geq 2$) z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. Urči, kolik přímek je určeno těmito body. Odvozený vztah ověř dosazením konkrétního čísla místo *n*.

Přímka je určena dvěma body $\Rightarrow$ budu hledat kolika způsoby je možné vybrat dva různé body:
první bod: *n* možností
druhý bod: $n-1$ možností
Ke každému bodu, který jsem vybral jako první mohu vystřídat všechny body vybrané jako druhé $\Rightarrow$ celkový počet přímek $n(n-1)$
Ověříme vztah:
$n = 2$ $\Rightarrow$ jedna přímka, vzorec $n(n-1) = 2 \cdot 1 = 2$ - špatně
$n = 3$ $\Rightarrow$ tři přímky, vzorec $n(n-1) = 3 \cdot 2 = 6$ - špatně
$\Rightarrow$ vzorec je špatně, výsledky jsou dvakrát větší než by měly být $\Rightarrow$ někde jsme něco zanedbali $\Rightarrow$ projdeme postup a budeme hledat chybu:
dva body *A* a *B*:
vybírám první bod $\Rightarrow$ 2 možnosti:
- 1. možnost: vybral jsem *A* $\Rightarrow$ druhý bod je bod *B* $\Rightarrow$ přímka *AB*
- 2. možnost: vybral jsem *B* $\Rightarrow$ druhý bod je bod *A* $\Rightarrow$ opět přímka *AB*

$\Rightarrow$ jednu přímku *AB* jsme započítali dvakrát, jednou jako *AB*, podruhé jako *BA* $\Rightarrow$ proto nám všechno vycházelo dvakrát větší $\Rightarrow$ musíme upravit vzorec vydělením 2 (všechny přímky jsme počítali dvakrát)

$\Rightarrow$ body určují $\frac{n(n-1)}{2}$ různých přímek

Př. 6: Král má osm dcer. Urči kolika způsoby může vybrat dvě dcery, které chce sníst stohlavý drak (Vzhledem k tomu, že drak bude jíst obě princezny najednou, nezáleží na tom, kterou vybereme jako první a kterou jako druhou).

Postupně vybíráme princezny k snídani:
1. výběr: 8 možností
2. výběr: 7 možností
Celkem možností: $8 \cdot 7$, ale princezně je asi jedno, jestli ji vybrali jako první nebo jako druhou $\Rightarrow$ nemá cenu rozlišovat výběry typu princezna Anna, princezna Barbora od princezna Barbora, princezna Anna $\Rightarrow$ každou možnost jsme započítali dvakrát $\Rightarrow$ počet možností, jak nakrmit draka je poloviční: $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$

Př. 7: Je dán čtverec *ABCD*, na každé z jeho stran je dáno *n* vnitřních bodů. Urči počet trojúhelníků, které mají vrcholy v těchto bodech a na různých stranách čtverce *ABCD*.

Budeme postupně vybírat body na vrcholy trojúhelníka a dáme pozor, kolikrát každý trojúhelník započítáme.
1. vrchol: bod vybíráme libovolně $\Rightarrow$ $4n$ možností
2. vrchol: vybíráme pouze na stranách čtverce, kde neleží bod vybraný jako první $\Rightarrow$ $3n$ možností
3. vrchol: vybíráme na zbývajících dvou stranách $\Rightarrow$ $2n$ možností
Celkový počet: $4n \cdot 3n \cdot 2n = 24n^3$ - ještě to není hotové
Kolikrát jsme započítali trojúhelník *KLM*? (při výběru bodů jsme rozlišovali pořadí bodů, které nemá vliv na to, jaký sestrojíme trojúhelník)
Stejné trojúhelníky: *KLM*, *KML*, *LMK*, *LKM*, *MKL*, *MLK* $\Rightarrow$ každý trojúhelník jsme započítali 6x $\Rightarrow$ nehotový vztah vydělíme 6
Body na stranách čtverce je dáno $4n^3$ trojúhelníků

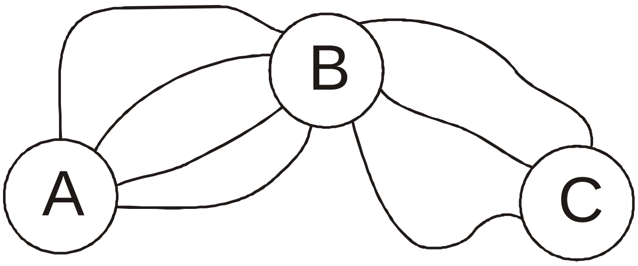
Př. 8: Urči počet všech čtyřciferných čísel s různými ciframi, které jsou dělitelné pěti.

Číslo je dělitelné pěti, právě když končí na 5 nebo 0 $\Rightarrow$ problém: nulu musíme řešit, když zkoumáme číslo na první cifře $\Rightarrow$ rozdělíme příklad na dvě části:
číslo končí nulou
1. cifra: 9 možností (nemůžeme použít nulu, která je na čtvrtém místě)
2. cifra: 8 možností (bez první číslice a nuly)
3. cifra: 7 možností (bez první číslice, druhé číslice a nuly)
4. cifra: 1 možnost (nula)
$\Rightarrow$ celkem $9 \cdot 8 \cdot 7$ možností
číslo končí pětkou
1. cifra: 8 možností (nemůžeme použít nulu a pětku, která je na čtvrtém místě)
2. cifra: 8 možností (bez první číslice a pětky)
3. cifra: 7 možností (bez první číslice, druhé číslice a pětky)
4. cifra: 1 možnost (pětka)
$\Rightarrow$ celkem $8 \cdot 8 \cdot 7$ možností

Celkem možností: čísla končící na nulu + čísla končící na pětku $9\cdot 8\cdot 7+8\cdot 8\cdot 7=952$

Př. 9: Z místa A do místa B vedou čtyři turistické trasy, z místa B do místa C tři. Urči kolika způsoby lze vybrat trasu z A do C a zpět tak, že právě jedna ze zmiňovaných sedmi cest bude použita dvakrát (tedy při cestě z A do C i při cestě zpět).

Nakreslíme si obrázek situace:



Způsob, jakým budeme vybírat cesty je ovlivněn tím, kterou z cest budeme opakovat $\Rightarrow$ řešíme příklad na dvakrát a možnosti pak sečteme (výsledek = počet možností při opakování trasy mezi A a B + počet možností při opakování trasy mezi B a C).

Počet možností pro každou volbu, spočítáme tak, že si představíme průchod trasou:

Opakujeme cestu mezi místy A a B

- Jsme v místě A, volíme cestu do B $\Rightarrow$ 4 možnosti
- Jsme B jdeme do C $\Rightarrow$ další cestu volíme ze 3 možností, kombinujeme s předchozí volbou $\Rightarrow$ $4\cdot 3$ možností pro trasu $A\Rightarrow B\Rightarrow C$
- Jsme v C, vracíme se do B $\Rightarrow$ máme pouze dvě možnosti (abychom neopakovali cestu z B do C), kombinujeme s předchozími volbami $\Rightarrow$ $4\cdot 3\cdot 2$ možností pro trasu $A\Rightarrow B\Rightarrow C\Rightarrow B$
- Jsme v B, vracíme se do A $\Rightarrow$ nemáme možnost volby, protože cestu z A do B musíme opakovat $\Rightarrow$ pro cestu $A\Rightarrow B\Rightarrow C\Rightarrow B\Rightarrow A$ máme celkem $4\cdot 3\cdot 2$ možností

Opakujeme cestu mezi místy B a C

- Jsme v místě A, volíme cestu do B $\Rightarrow$ 4 možnosti
- Jsme B jdeme do C $\Rightarrow$ další cestu volíme ze 3 možností, kombinujeme s předchozí volbou $\Rightarrow$ $4\cdot 3$ možností pro trasu $A\Rightarrow B\Rightarrow C$
- Jsme v C, vracíme se do B $\Rightarrow$ máme pouze jednu možnost (musíme opakovat cestu z B do C)$\Rightarrow$ $4\cdot 3$ možností pro trasu $A\Rightarrow B\Rightarrow C\Rightarrow B$
- Jsme v B, vracíme se do A $\Rightarrow$ máme tři možnosti volby (cestu, kterou jsme šli z A do B nesmíme opakovat) $\Rightarrow$ pro cestu $A\Rightarrow B\Rightarrow C\Rightarrow B\Rightarrow A$ máme celkem $4\cdot 3\cdot 3$ možností

Celkový výsledek: $4\cdot 3\cdot 2+4\cdot 3\cdot 3=60$

Př. 10: Petáková:
strana 145/cvičení 34
strana 145/cvičení 36

Shrnutí: Pokud si počet možností při výběru závisí na konkrétním prvku, který jsme již vybrali, rozdělíme si odvození na více části a počty možností sečteme (pravidlo součtu).