

9.1.1 Základní kombinatorická pravidla I

Předpoklady:

Př. 1: Ve třídě je 17 děvčat a 13 kluků. Kolik dvojic kluk-holka je možné ze studentů třídy sestavit?

Vybíráme ze 17 holek \Rightarrow 17 možností, jak vybrat holku

Ať vybereme jakoukoliv holku, můžeme k ní přidat libovolného kluka \Rightarrow 13 možností, jak vybrat kluka pro už vybranou holku \Rightarrow celkem $17 \cdot 13$ možností

Aby bylo jasnější, jak jsme příklad řešili, **budeme všechny výsledky udávat ve tvaru součinu (případně složitějšího výrazu) bez závěrečného vyčíslení** (s kalkulačkou je to otázka chvilky, z výsledku 221 nikdo nepozná, jak jsme k němu došli).

Pedagogická poznámka: Na předcházející příklad nechávám studentům jenom chvilku.

Poté, co si ukážeme jeho řešení, jsou studenti v naprosté většině případů schopni postupovat dále sami.

Př. 2: V prvních ročnících studují tyto počty studentů: 1.A 30 studentů, 1.B 33 studentů, 1.C 30 studentů a 5.O 22 studentů. Kolika způsoby je možné sestavit delegaci, která obsahuje z každé třídy právě jednoho studenta?

Podobně jako předchozí příklady: 30 možností jak vybrat zástupce 1.A, ke každému takto vybranému můžeme vystřídat všechny možnosti výběru z ostatních tříd:

Celkový počet možností: $30 \cdot 33 \cdot 30 \cdot 22$
1.A 1.B 1.C 5.O

Delegaci je možné sestavit $30 \cdot 33 \cdot 30 \cdot 22$ způsoby.

Př. 3: V současnosti používané státní poznávací značky automobilů mají tvar: CPC-CCCC, kde C znamená číslici od 0 do 9 a P písmeno z mezinárodní abecedy s 26 znaky. Kolik státních poznávacích značek je možné sestavit? Kolik státních poznávacích značek bylo možné sestavit u předcházejícího systému PPP-CCCC.

Stejně jako u předchozích příkladů, můžeme s výběrem jednoho konkrétního znaku na libovolném místě kombinovat všechny možnosti výběru na ostatních místech \Rightarrow číslice vybíráme z 10 možností, písmena z 26 možností

Současný systém: $10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26000000$

Bývalý systém: $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175760000$

Př. 4: Urči počet všech trojčiferných čísel.

Trojčiferné číslo má tvar například: 547

Kolik možností na jednotlivé cifry?

1. cifra: 9 možností (nemůže tam být nula)
2. cifra: 10 možností (libovolná číslice)
3. cifra: 10 možností (libovolná číslice)

Všechny možnosti pro libovolnou cifru můžeme kombinovat se všemi možnostmi pro ostatní cifry \Rightarrow celkový počet čísel: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ - logický výsledek trojmístná čísla začínají číslem 100 a končí číslem 999 \Rightarrow je jich 900

Př. 5: Najdi společné rysy předchozích příkladů.

Wybírali jsme z nějaké množiny a sestavovali jsme uspořádané skupiny
Možnosti jsme kombinovali navzájem každou s každou.

Pedagogická poznámka: I když studenti nebudou schopni zformulovat společné rysy tak, jak jsou uvedeny níže, je alespoň pokus o tuto formulaci velmi potřebný.

Všechny předchozí příklady mají společné rysy:

- vybírali jsme prvky z množin a sestavovali jsme uspořádané (záleželo na pořadí dvojice (trojice, sedmerice, trojice – obecně používáme název **k-tice**)
- ke každému výběru z jedné množiny jsme mohli kombinovat všechny možnosti výběrů z ostatních množin

\Rightarrow počet možností, kterými můžeme získat výsledek, jsme spočetli jako součin možností výběru z jednotlivých množin (kvůli tomu, že k jednomu výběru z libovolné množiny, můžeme kombinovat všechny možnosti výběru z ostatních množin)

při tomto postupu jsme používali **kombinatorické pravidlo součinu**

Počet všech uspořádaných k -tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního n_2 způsoby atd. až k -tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$

Př. 6: Urči hodnoty k, n_1, n_2, \dots, n_k v příkladě 4.

Sestavovali jsme uspořádané trojice $\Rightarrow k = 3$

Ze vztahu $9 \cdot 10 \cdot 10$ vyplývá: $n_1 = 9, n_2 = 10, n_3 = 10$

Proč se v pravidlu kombinatorického součinu neustále opakovalo „po výběru předchozích členů“? Ukáže hned následující příklad.

Př. 7: Urči počet všech trojiciferných čísel, ve kterých se žádná cifra neopakuje.

Trojiciferné číslo má tvar například: 547

Kolik možností na jednotlivé cifry?

1. cifra: 9 možností (nemůže tam být nula, zatím nejsme nijak omezeni)
2. cifra: 9 možností (můžeme použít nulu, ale nemůžeme použít číslici vybranou na první místo)
3. cifra: 8 možností (můžeme použít nulu, ale nemůžeme použít číslice vybrané na první dvě místa)

Všechny možnosti pro libovolnou cifru můžeme kombinovat se všemi možnostmi pro ostatní cifry \Rightarrow celkový počet čísel: $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$

Př. 8: Vysvětli, proč není možné vyřešit předchozí příklad „sestavováním odzadu“ (tím, že začneme hledat nejdříve poslední cifru), které vede k nesprávnému výsledku $8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$.

Pokud bychom sestavovali číslo odzadu, platilo by:

3. cifra: 10 možností

2. cifra: 9 možností

1. cifra: nevíme kolik máme možností, protože záleží na tom, jestli už na místo druhé nebo třetí cifry byla vybrána nula (\Rightarrow 8 možností pro první cifru) nebo ne (\Rightarrow 7 možností pro 1. cifru)

\Rightarrow je lepší postupovat tak, abychom nejdříve obsazovali místa omezená nějakou podmínkou.

Pedagogická poznámka: Sestavováním odzadu je příklad vyřešen v příští hodině. Zde je uveden pouze kvůli tomu, aby studenti uvědomili nebezpečí stavu, kdy není jasné v jaké situaci vlastně jsme (použití nebo nepoužití nuly).

Vrátíme se na chvíli na začátek k nejjednodušším příkladům:

Př. 9: Ve třídě je 17 děvčat a 13 kluků. Kolika způsoby může třída vybrat jednoho zástupce do školní rady?

Vybíráme jednu studentku ze 17 nebo jednoho kluka ze 13 \Rightarrow dohromady $17 + 13 = 30$ možností (více než logické, když má třída 30 studentů)

Př. 10: V prvních ročnících studují tyto počty studentů: 1.A 30 studentů, 1.B 33 studentů, 1.C 30 studentů a 5.O 22 studentů. Kolika způsoby je možné vybrat jednoho zástupce 1. ročníků v poradním orgánu ředitele školy?

Stejně jako předchozí příklad: máme celkem $30 + 33 + 30 + 22$ možností.

Př. 11: Najdi společné rysy předchozích příkladů.

Vybírali jsme jeden prvek z více množin.

Žádný prvek nebyl ve dvou množinách.

Pedagogická poznámka: Podobný příklad jako příklad 5. Toho, že množiny mají prázdné průniky si studenti většinou nevšimnou, nemá cenu řešení příkladu příliš protahovat.

Oba předchozí příklady mají společné rysy:

- vybírali jsme jeden prvek se sjednocení několika množin
- množiny, ze kterých jsme vybírali jsou **disjunktní** (žádný prvek není ve dvou množinách, množiny mají prázdné průniky)

\Rightarrow počet možností, kterými můžeme získat výsledek, jsme spočetli jako součet možností výběru z jednotlivých množin (vybereme množinu a z ní pak prvek)
při tomto postupu jsme používali **kombinatorické pravidlo součtu**

Jsou-li A_1, A_2, \dots, A_n konečné množiny, které mají po řadě p_1, p_2, \dots, p_n prvků a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \dots + p_n$

Požadavek na disjunktnost množin je strašně důležitý, jeho opomenutí pravidelně ústí do katastrof.

Př. 12: Petáková:
strana 145/cvičení 32
strana 145/cvičení 33

Shrnutí: