

8.3.2 Limity některých posloupností

Předpoklady: 8301

Opakování z minulé hodiny:

Hodnoty posloupnosti $\left(\frac{8}{2^n} + 2\right)_{n=1}^{\infty}$ se pro n blížící se k nekonečnu blíží k 2 a to tak, že mezi posloupností a číslem 2 „neexistuje žádná mezera“ \Rightarrow říkáme, že číslo 2 je limitou posloupnosti $\left(\frac{8}{2^n} + 2\right)_{n=1}^{\infty}$ pro n blížící se k nekonečnu (píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{2^n} + 2\right) = 2$).

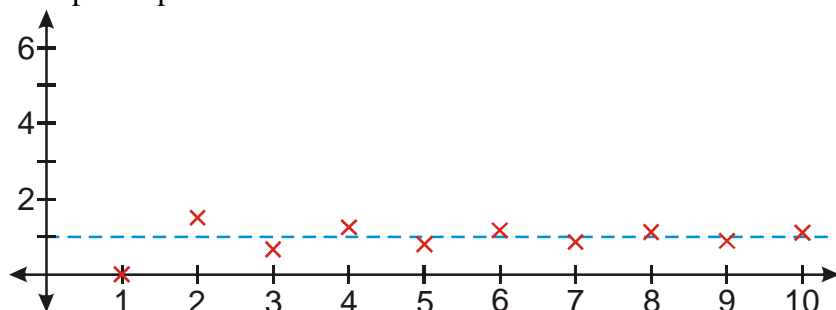
Exaktní zachycení předchozího odstavce obsahuje definice limity:

Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **konvergentní**, právě když existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že platí: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. Číslo a říkáme **limita posloupnosti** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Nyní si rozebereme posloupnost $\left(\frac{[-1]^n}{n} + 1\right)_{n=1}^{\infty}$.

Prvních deset členů posloupnosti: $0; 1\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; 1\frac{1}{4}; \frac{4}{5}; 1\frac{1}{6}; \frac{6}{7}; 1\frac{1}{8}$

Graf posloupnosti:



Vypadá to, že limitou této posloupnosti je číslo 1. Hodnoty se k němu blíží z obou stran.

Zkusíme vlastnost $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{[-1]^n}{n} + 1\right) = 1$ dokázat z definice v modrém rámečku.

Zvolíme $\varepsilon = 0,1$. Hledáme takové n_0 , aby platilo, že pro $n \geq n_0$, $|a_n - a| < \varepsilon$.

Dosadíme: $\left|\frac{[-1]^n}{n} + 1 - 1\right| < 0,1$

$\left|\frac{[-1]^n}{n}\right| < 0,1$ platí (pro $n \in \mathbb{N}$): $\left|\frac{[-1]^n}{n}\right| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{1}{n}$

$$\frac{1}{n} < 0,1$$

$10 < n \Rightarrow$ pro a_{11} a všechna a_n za ním platí: $|a_n - 1| < 0,1$.

Zkusíme to obecně pro $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{[-1]^n}{n} + 1 - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{[-1]^n}{n} \right| < \varepsilon \quad \text{platí (pro } n \in \mathbb{N} \text{): } \left| \frac{[-1]^n}{n} \right| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

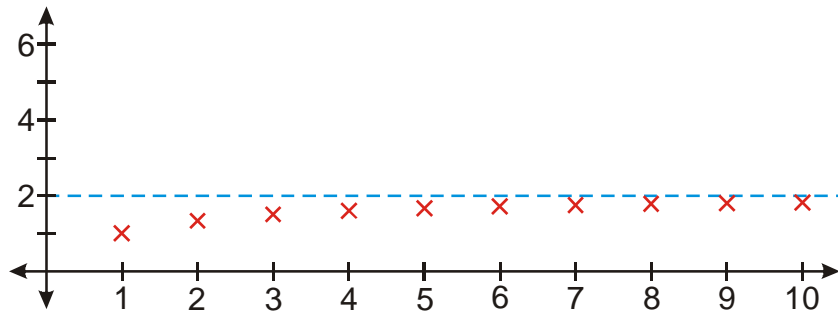
$\frac{1}{\varepsilon} < n \Rightarrow$ protože $\varepsilon > 0$ určitě takové a_n najdu \Rightarrow posloupnost $\left(\frac{[-1]^n}{n} + 1 \right)_{n=1}^{\infty}$ má limitu 1.

Př. 1: Pro zadané posloupnosti napiš prvních deset členů, načrtni jejich graf a odhadni zda mají limitu:

a) $\left(\frac{2n}{n+1} \right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left([-1]^n + \frac{1}{n} \right)_{n=1}^{\infty}$ c) $\left([-2]^n \right)_{n=1}^{\infty}$ d) $(1)_{n=1}^{\infty}$

a) $\left(\frac{2n}{n+1} \right)_{n=1}^{\infty}$

1; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{12}{7}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{16}{9}$; $\frac{9}{5}$; $\frac{20}{11}$



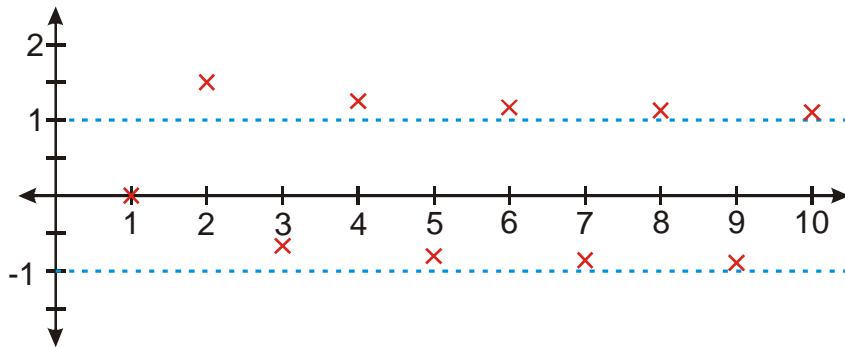
Z grafu se zdá, že posloupnost má limitu 2

Z úvahy: výraz $\frac{2n}{n+1}$, se blíží výrazu $\frac{2n}{n} = 2$

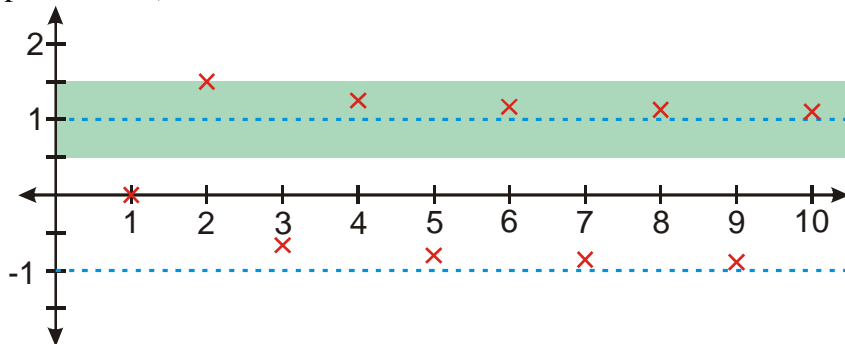
\Rightarrow zřejmě platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2$

b) $\left([-1]^n + \frac{1}{n} \right)_{n=1}^{\infty}$

0; $\frac{3}{2}$; $-\frac{2}{3}$; $\frac{5}{4}$; $-\frac{4}{5}$; $\frac{7}{6}$; $-\frac{6}{7}$; $\frac{9}{8}$; $-\frac{8}{9}$; $\frac{11}{10}$

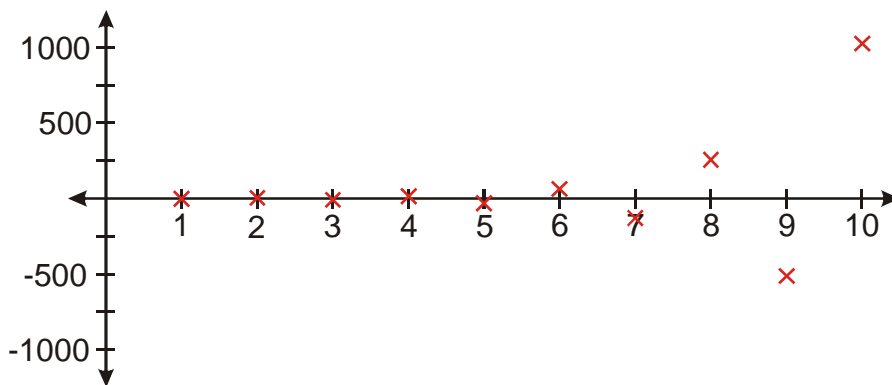


Z grafu se zdá, že posloupnost má dvě limity 1 a -1 , ale pozor!!! Kdyby posloupnost měla limitu 1, musel by například pro pás o poloměru 0,5 existovat člen a_n takový, že všechny členy posloupnosti za ním by byly uvnitř pásu, ale to se kvůli tomu, že polovina členů posloupnosti se snaží přiblížit k -1 nestane, protože tyto členy se do pásu nedostanou \Rightarrow posloupnost nemá žádnou limitu (u limit posloupností nejde sedět jedním zadkem na dvou posvíceních).



c) $([-2]^n)_{n=1}^{\infty}$

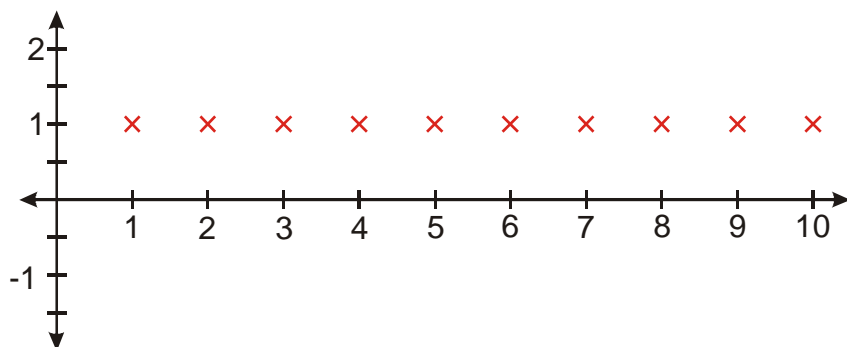
$-2; 4; -8; 16; -32; 64; -128; 256; -512; 1024$



jak z hodnot, tak z grafu je zřejmé, že posloupnost nemá žádnou limitu

d) $(1)_{n=1}^{\infty}$

$1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1$



na první pohled se zdá, že posloupnost se „k ničemu neblíží“ a neměla by tedy mít limitu, pokud však použijme přímo definici limity, je zřejmé, že posloupnost má limitu rovnou jedné, protože pro libovolně široký pás kolem 1 jsou všechny členy posloupnosti ihned uvnitř a splňují tak podmínku pro existenci limity

⇒ zřejmě platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1) = 1$

Předchozí příklady dobře dokumentují dvě další věty o limitách posloupností:

- **Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.**
- **Každá konvergentní posloupnost je omezená.**

Př. 2: Najdi v předchozím příkladu bod, který dokumentuje každou z předchozích dvou vět a zkus najít hlavní myšlenku důkazů obou vět.

a) Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.
 větu dokumentuje bod b), ačkoliv se z grafu zdá, že posloupnost má dvě limity, je v příkladu zdůvodněno, proč posloupnost nemá ani jedinou (například do pásu o poloměru 0,5 existovat se nevejde polovina členů posloupnosti, které se snaží přiblížit hodnotě -1) ⇒ myšlenka důkazu: kdyby posloupnost měla dvě různé limity stačilo by kolem jedné z nich udělat pás, který má menší poloměr než je vzdálenost těchto limit a členy, které se blíží k druhé limitě budou mimo něj)

b) Každá konvergentní posloupnost je omezená.
 s větou souvisí bod c), kde máme neomezenou posloupnost a je ihned vidět, že nemůže mít limitu ⇒ myšlenka důkazu: posloupnost je neomezená, právě když se pro n blízcí se nekonečnu blíží členy posloupnosti také nekonečnu (nebo mínus nekonečnu = roste nebo klesá nade všechny meze), pak se ale nemohou blížit k nějakému konkrétnímu číslu (limitě)

Př. 3: Odhadni limity následujících posloupností a poté jejich existenci dokaž použitím definice limity:

a) $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ c) $(3)_{n=1}^{\infty}$ d) $(q^n)_{n=1}^{\infty}, |q| < 1$

a) $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$
 odhadujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$

chceme dokázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ najdeme takové n_0 , aby platilo, že pro $n \geq n_0$,

$|a_n - a| < \varepsilon$. Budeme odvozovat od konce:

$$\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{2^n} \right| < \varepsilon \quad 2^n \text{ je vždy kladné číslo} \Rightarrow \text{platí } \left| \frac{1}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon \quad / \cdot \frac{2^n}{\varepsilon}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < 2^n \quad \text{zlogaritmuje, } \log x \text{ je rostoucí funkce} \Rightarrow \text{neobracíme nerovnost}$$

$$\log \frac{1}{\varepsilon} < \log 2^n$$

$$\log \frac{1}{\varepsilon} < n \cdot \log 2 \quad / : \log 2 \quad \log 2 > 0 \Rightarrow \text{znaménko se nemění}$$

$$\log \frac{1}{\varepsilon} < n \cdot \log 2 \quad / : \log 2$$

$$\frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 2} < n \quad \Rightarrow \text{pro každé } \varepsilon \text{ dokážeme dopočítat } n \Rightarrow \text{podmínka je splněna} \Rightarrow \text{platí:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

b) $\left(\frac{1}{n} \right)_{n=1}^{\infty}$

odhadujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

chceme dokázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ najdeme takové n_0 , aby platilo, že pro $n \geq n_0$,

$|a_n - a| < \varepsilon$. Budeme odvozovat od konce:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \quad n \text{ je přirozené číslo} \Rightarrow \text{platí } \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad / \cdot \frac{n}{\varepsilon}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n \quad \Rightarrow \text{máme určené } n \text{ pro každé } \varepsilon \Rightarrow \text{podmínka je splněna} \Rightarrow \text{platí: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

c) $(3)_{n=1}^{\infty}$

odhadujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3$

chceme dokázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ najdeme takové n_0 , aby platilo, že pro $n \geq n_0$,

$|a_n - a| < \varepsilon$. Budeme odvozovat od konce:

$$|3-3| < \varepsilon$$

$|0| < \varepsilon \Rightarrow$ pro libovolné ε je podmínka splněna ihned \Rightarrow jako a_n můžeme brát a_1 a jako n jedničku \Rightarrow podmínka je splněna \Rightarrow platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 0$

d) $(q^n)_{n=1}^{\infty}, |q| < 1$

odhadujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

chceme dokázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ najdeme takové n_0 , aby platilo, že pro $n \geq n_0$,

$$|a_n - a| < \varepsilon. \text{ Budeme odvozovat od konce:}$$

$$|q^n - 0| < \varepsilon$$

$$|q^n| < \varepsilon \quad \text{zlogaritmuje, } \log x \text{ je rostoucí funkce } \Rightarrow \text{neobracíme nerovnost}$$

$$\log |q^n| < \log \varepsilon$$

$$n \log |q| < \log \varepsilon \quad /: \log |q| \quad |q| < 1 \Rightarrow \log |q| < 0 \Rightarrow \text{obracíme znaménko nerovnosti}$$

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log |q|} \Rightarrow \text{pro každé } \varepsilon \text{ dokážeme dopočítat } n \Rightarrow \text{podmínka je splněna } \Rightarrow \text{platí:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0; \quad |q| < 1$$

Poslední výsledek je jasný a důležitý zároveň. Zformulujeme si ho do věty a podle ní zformulujeme ještě jednu větu:

- **Geometrická posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí $|q| < 1$ je konvergentní a její limita je 0.**
- **Geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pro jejíž kvocient q platí $|q| < 1$ je konvergentní a její limita je 0.**

Shrnutí: Dosazením do definice můžeme dokázat existenci limity.