

8.2.12 Příklady z finanční matematiky III

Předpoklady: 8211

Splácení dluhů

Méně příjemnou součástí finanční matematiky je výpočet splátek dluhu.

Př. 1: Banka poskytla podnikateli koncem roku 2007 úvěr ve výši 1000000 Kč. Roční úroková míra úvěru je 15% (úrokovací období je jeden rok) a podnikatel ho má splatit ve třech stejných splátkách vždy na konci roku (tedy splátky budou na konci prosince 2008, 2009 a 2010). Urči výši jedné splátky. Kolik peněz zaplatí podnikatel na úrocích?

Budeme postupně sledovat výši dluhu, který má podnikatel vůči bance.

Výši splátky označíme s

Konec roku 2007 ... 10^6

Konec roku 2008, před splátkou ... $10^6(1+0,15)$ (dluh se zvětšil, protože se banka připsala úroky z půjčky)

Konec roku 2008, po 1. splátce ... $10^6(1+0,15) - s$

Konec roku 2009, před splátkou ...

$[10^6(1+0,15) - s](1+0,15) = 10^6(1+0,15)^2 - s(1+0,15)$ (k nesplacené částce si banka připsala úroky z půjčky)

Konec roku 2009, po 2. splátce ... $10^6(1+0,15)^2 - s(1+0,15) - s$

Konec roku 2010, před splátkou ...

$[10^6(1+0,15)^2 - s(1+0,15) - s](1+0,15) = 10^6(1+0,15)^3 - s(1+0,15)^2 - s(1+0,15)$
(k nesplacené částce si banka připsala úroky z půjčky)

Konec roku 2009, po 3. splátce ...

$10^6(1+0,15)^3 - s(1+0,15)^2 - s(1+0,15) - s = 0$ (úvěr je splacen)

Spočítáme s : $10^6(1+0,15)^3 = s[(1+0,15)^2 + (1+0,15) + 1]$

Modře vyznačený výraz je součtem prvních tří členů geometrické posloupnosti $a_1 = 1$,

$q = 1+0,15 \Rightarrow$ výraz můžeme zjednodušit pomocí vzorce pro součet prvních n členů

geometrické řady (v tomto případě to není velké zjednodušení, ale v případě většího množství splátek je to jasné zjednodušení)

$$10^6(1+0,15)^3 = s \frac{(1+0,15)^3 - 1}{(1+0,15) - 1}$$

$$10^6(1+0,15)^3 = s \frac{(1+0,15)^3 - 1}{0,15}$$

$$s = \frac{10^6 (1+0,15)^3 \cdot 0,15}{(1+0,15)^3 - 1} = 437977 \text{ Kč}$$

Celková částka zaplacená podnikatelem $3 \cdot 437977 = 1313930 \text{ Kč}$

Zaplaceno na úrocích: $1313930 - 1000000 = 313930 \text{ Kč}$

Podnikatel zaplatil úvěr ve třech splátkách po 437977 Kč, na úrocích pak zaplatí 313930 Kč.

Př. 2: Banka poskytla podnikateli koncem roku 2007 úvěr na 10 let ve výši 1000000 Kč. Roční úroková míra úvěru je 15% (úrokovací období je jeden rok) a podnikatel ho má splatit v deseti stejných splátkách vždy na konci roku. Urči výši jedné splátky. Kolik peněz zaplatí podnikatel na úrocích?

Můžeme odvozovat stejně jako v předchozím příkladu:

Konec roku 2017, po 10. splátce ...

$$10^6 (1+0,15)^{10} - s(1+0,15)^9 - \dots - s(1+0,15) - s = 0 \text{ (úvěr je splacen)}$$

Spočítáme s : $10^6 (1+0,15)^{10} = s[(1+0,15)^9 + \dots + (1+0,15) + 1]$

$$10^6 (1+0,15)^{10} = s \frac{(1+0,15)^{10} - 1}{(1+0,15) - 1}$$

$$10^6 (1+0,15)^{10} = s \frac{(1+0,15)^{10} - 1}{0,15}$$

$$s = \frac{10^6 (1+0,15)^{10} \cdot 0,15}{(1+0,15)^{10} - 1} = 199252,10 \text{ Kč}$$

Celková částka zaplacená podnikatelem $10 \cdot 19922,10 = 1992520,60 \text{ Kč}$

Zaplaceno na úrocích: $1992520,60 - 1000000 = 992520,60 \text{ Kč}$

Podnikatel zaplatil úvěr v deseti splátkách po 199252,10 Kč, na úrocích pak zaplatí 992520,60 Kč.

Výsledný výraz pro jednu splátku můžeme zapsat jako vzorec:

Pokud banka poskytne úvěr D Kč na n let s roční úrokovou mírou p a úrokovacím obdobím 1 rok a jestliže má být úvěr splacen v n stejných ročních splátkách (první část po jednom roce od poskytnutí úvěru) je výsledná výše splátky určena vztahem:

$$s = \frac{D \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \cdot \frac{p}{100}}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1}$$

Př. 3: Pavel Novák si při koupi bytu půjčil na hypotéční úvěr 1000000 Kč. Banka úvěr poskytla na 25 let, s roční úrokovou mírou fixovanou na celou dobu splácení na 5,7% a měsíčním úrokovým obdobím. Úvěr je splácen formou měsíčních splátek,

první po měsíci od jeho poskytnutí, poslední po uplynutí 25 let. Urči výšku jedné splátky.

Můžeme postupovat zcela stejně jako v předchozích příkladech, roční úrokovou míru musíme přepočítat na jeden měsíc.

Celkový počet splátek: $25 \cdot 12 = 300$

Měsíční úroková míra: $\frac{5,7}{12} = 0,475$

Po splacení celého úvěru: $10^6 (1+0,00475)^{300} - s(1+0,00475)^{299} - \dots - s(1+0,00475) - s = 0$
(úvěr je splacen)

Spočítáme s : $10^6 (1+0,00475)^{300} = s \left[(1+0,00475)^{299} + \dots + (1+0,00475) + 1 \right]$

$$10^6 (1+0,00475)^{300} = s \cdot \frac{(1+0,00475)^{300} - 1}{(1+0,00475) - 1}$$

$$10^6 (1+0,00475)^{300} = s \cdot \frac{(1+0,00475)^{300} - 1}{0,00475}$$

$$s = \frac{10^6 (1+0,00475)^{300} \cdot 0,00475}{(1+0,00475)^{300} - 1} = 6260,90 \text{ Kč}$$

Celková částka zaplacená podnikatelem $300 \cdot 6260,90 = 1878270 \text{ Kč}$

Zaplaceno na úrocích: $1878270 - 1000000 = 878270 \text{ Kč}$

Pedagogická poznámka: Výpočty hypoték mají jednu obrovskou výhodu, je možné si ihned kontrolovat výsledky na on-line kalkulačkách na internetu.

Př. 4: Urči, jak by se splátky Pavlovi hypotéky změnily, kdyby Pavel prodloužil dobu splatnosti na 30 let.

Počet splátek: $30 \cdot 12 = 360$

Dosadíme rovnou do konečného vzorce:

$$s = \frac{10^6 (1+0,00475)^{360} \cdot 0,00475}{(1+0,00475)^{360} - 1} = 5804,00 \text{ Kč}$$

Pokud se prodlouží doba splácení hypotéky na 30 let, klesne měsíční splátka na 5804 Kč.

Př. 5: Jednou z oblíbených forem nákupů na dluh je půjčka 10+1. Při této půjčce zaplatí kupující v obchodě pouze desetinu ceny a pak zaplatí deset dalších splátek ve stejné výši (zaplatí tedy postupně 110% běžné prodejní ceny). Porovnej výhodnost tohoto typu půjčky s klasickým bankovním úvěrem s roční úrokovou mírou 15% a deseti měsíčními splátkami s úrokovacím obdobím 1 měsíc. Předpokládej, že si spotřebitel chce pořídit novou LCD televizi v nákupní ceně 20000 Kč.

Splácení 10+1 \Rightarrow kupující zaplatí 110% ceny, tedy 22000 Kč.

Půjčka: použijeme vzorec:

přepočítaná úroková míra na 12 měsíc ... $\frac{15}{12} \%$

počet splátek 10

Dosadíme do vzorce: $s = \frac{20000 \left(1 + \frac{15}{12 \cdot 100}\right)^{10} \cdot \frac{15}{12 \cdot 100}}{\left(1 + \frac{15}{12 \cdot 100}\right)^{10} - 1} = 2140,10 \text{ Kč} \Rightarrow$ na splátkách by

Pokud by kupující půjčil na televizi v bance, zaplatil by každý měsíc 21401 Kč (celkem o 600 Kč méně než v případě půjčky 10+1), navíc by první splátku splácel až měsíc po nákupu.

Př. 6: Petáková:
strana 72/cvičení 67
strana 71/cvičení 68

Shrnutí: Splátky dluhu se dají mimo předpřipravené vztahy vypočítat i pomocí součtu geometrické řady.