

8.2.9 Užítí geometrických posloupností

Předpoklady: 8206, 8207

Pedagogická poznámka: Tři příklady v této hodině nezaberou 45 minut, původně jsem předpokládal, že jejich řešení bude trvat maximálně 20 minut a zbytek hodiny bude možné věnovat následující hodině 8209. Bohužel došlo k jednomu z nejnečekanějších překvapení. Druhý příklad počítali studenti s ohromnými problémy, i ti nejlepší z nich se neustále snažili místo výpočtu a_n určit s_n jako v příkladě 1.

Původně jsem zařazoval příklad 2 jako druhý kvůli použití logaritmu při výpočtu času nutného k jejich namnožení. Zkušenost, kterou jsem udělal se studenty, je podle mě dalším argumentem pro zachování tohoto pořadí.

Př. 1: O vynálezci šachů se traduje zajímavá legenda. Když se s jeho vynálezem seznámil tehdejší čínský císař, novou hru si velice zamiloval. Pozval proto vynálezce k sobě a nabídl mu jako odměnu cokoli, si bude přát. Vynálezce se chvíli zamyslel a pak požádal císaře o trochu rýže. Šachovnice má 64 polí. Za první políčku chtěl dostat jedno zrnko rýže, za druhé dvě zrnka rýže, za třetí čtyři zrnka, za čtvrté osm zrnka a tak dále. Za každé další políčko chtěl dvojnásobný počet zrníček než za políčko předchozí. Císař byl velmi udiven jeho skromností a nabízel mu cennější odměnu. Odhadni počet zrníček, které vynálezce po císaři žádal. Kolik by to bylo kg? Urči počet zrníček výpočtem. Urči jejich hmotnost v kg, pokud 1 kg rýže tvoří přibližně 30 000 zrnka.

Počty zrnka na jednotlivých políčkách tvoří geometrickou posloupnost: 1, 2, 4, 8, 16, ...

$a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 64$ (64 políček šachovnice)

Určíme součet: $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} \doteq 1,8 \cdot 10^{19}$

Hmotnost zrnka v kg: $\frac{1,8 \cdot 10^{19}}{30000} = 6,1 \cdot 10^{14}$ kg

Pro srovnání celosvětová roční produkce rýže je $5 \cdot 10^{11}$ kg .

Př. 2: Baktérie Escherichia coli se v příznivých podmínkách dělí přibližně jednou za hodinu. Kolik bakterií se namnoží v roztoku za příznivých podmínek za 1 den. Jak dlouho by trvalo než by hmotnost bakterií překročila hmotnost Země? Úhyn neuvažuj. Hmotnost jedné bakterie je přibližně $6 \cdot 10^{-15}$ kg . Hmotnost Země $6 \cdot 10^{24}$ kg .

Počty bakterií tvoří geometrickou posloupnost: 1, 2, 4, 8, 16, ..

$a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 25$ (první člen je po 0 hodinách jediná bakterie na začátku pokusu)

použijeme vzorec pro n -tý člen: $a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_{25} = 1 \cdot 2^{24} = 16776216$

Za jak dlouho by bakterie vážily stejně jako Země:

Potřebný počet bakterií: $\frac{6 \cdot 10^{24}}{6 \cdot 10^{-15}} = 10^{39} \Rightarrow$ toto musí být hodnota hledané n -tého členu

posloupnosti

$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow 10^{39} = 2^{n-1}$ - musíme logaritmovat

$$\log 10^{39} = \log 2^{n-1}$$

$$39 \cdot \log 10 = (n-1) \log 2$$

$$n-1 = \frac{39}{\log 2}$$

$$n = \frac{39}{\log 2} + 1 = 130,6 \Rightarrow 131 \text{ člen posloupnosti} \Rightarrow \text{po 130 hodinách}$$

Po 130 hodinách (5,5 dne) by bakterie vážily více než Země.

Př. 3: Počet HIV pozitivních občanů ČR republiky dosahoval na počátku roku 2007 přibližně 1000 osob (jedná se o osoby pozitivně testované s prokázaným virem, ne o odhady, které jsou přibližně 10x vyšší). Při tetování bylo v průběhu roku 2007 objeveno 122 nově nakažených. Kolik procent HIV pozitivních přibylo v roce 2007? Urči počet HIV pozitivních v roce 2015, pokud by šíření nemoci postupovalo stejným tempem. Kolik nakažených by za tohoto předpokladu bylo v roce 2050?

1000 ... 100%

122 ... x %

$$\frac{x}{122} = \frac{100}{1000} \Rightarrow x = \frac{100}{1000} \cdot 122 = 12,2 \%$$

V roce 2007 přibylo 12,2% HIV pozitivních.

Počet nemocných v roce:

začátek 2008 ... $1000 \cdot 1,122$

začátek 2009 ... $(1000 \cdot 1,122) \cdot 1,122$

po x letech ... $1000 \cdot 1,122^x$

do konce roku 2015 uplyne od konce roku 2007 8 let

počet nakažených v roce 2015 ... $1000 \cdot 1,122^8 = 2512$ osob

do konce roku 2050 uplyne od konce roku 2007 43 let

počet nakažených v roce 2050 ... $1000 \cdot 1,122^{43} = 141154$ osob

Pokud se bude nemoc šířit stejným tempem zvýší se počet nakažených do konce roku 2015 na 2512 osob do konce roku 2050 na 141154 osob.

Shrnutí: Exponenciální růst popisovaný geometrickou posloupností s kvocientem větším než 1 je čím dál rychlejší a proto dlouhodobě neudržitelný.