## 8.2.7 Vzorce pro geometrickou posloupnost

**Předpoklady:** 8202, 8206

**Př. 1:** Pro geometrickou posloupnost platí $a_5 = \frac{1}{2}$; $q = 2$. Urči člen $a_9$, aniž bys určoval $a_1$.

Mohli bychom pomocí vzorce pro *n*-tý člen určit člen $a_1$ a pak pomocí stejného vzorce určit i $a_9$. Tento postup zakazuje zadání příkladu a je složitější.
Zkusíme to jinak:
Abych se od členu $a_5$ dostal ke členu $a_9$ musím čtyřikrát ($9-5=4$) násobit kvocientem $\Rightarrow$
$a_9 = a_5 \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = a_5 \cdot q^4 = \frac{1}{2} \cdot 2^4 = 2^3 = 8$
Člen $a_9$ se rovná 8.

**Př. 2:** V geometrické posloupnosti s kvocientem *q* vypočítej hodnotu členu $a_s$, pokud znáš hodnotu $a_r$.

Je to stejný příklad jako předchozí, akorát počítáme v písmenkách.
Člen $a_r$ násobím kvocientem *q* a to $(s-r)$ krát $\Rightarrow$ $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$.

Vzorec funguje i pro výpočet předchozího členu. Dosadíme hodnoty z příkladu 1:
$d = 2$, $a_9 = 8$, počítáme člen $a_5 = a_9 \cdot q^{5-9} = 8 \cdot 2^{-4} = \frac{1}{2}$.

V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem *q* platí pro všechna $r, s \in N$
$a_s = a_r \cdot q^{s-r}$..

Vzorec je možné snadno interpretovat slovně: určitý člen v posloupnosti vypočtu z libovolného předchozího tak, že ho vynásobím kvocientem tolikrát, o kolik je jeho index větší. (při výpočtu z libovolného následujícího kvocientem dělím).

**Př. 3:** (BONUS) Dokaž pomocí vzorce pro *n*-tý člen aritmetické posloupnosti platnost vzorce $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$.

Pro členy posloupnosti ve vzorci platí:
$a_r = a_1 \cdot q^{r-1}$
$a_s = a_1 \cdot q^{s-1}$
Rovnice vydělíme:
$\frac{a_s}{a_r} = \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{q^{s-1}}{q^{r-1}}$

$\frac{a_s}{a_r} = q^{s-1-(r-1)}$

$a_s = a_r \cdot q^{s-r}$

Předchozí postup je pochopitelný, ale také lehce napadnutelný. Při jeho použití dělíme a museli bychom tedy zajistit, aby všechna čísla v první rovnici byla nenulová. Většinou se používá jiný postup:

$a_s = a_1 \cdot q^{s-1}$

určitě platí: $s-1 = s-r+r-1$

$a_s = a_1 \cdot q^{s-r+r-1} = a_1 \cdot q^{s-r} \cdot q^{r-1} = \left(a_1 \cdot q^{r-1}\right) \cdot q^{s-r} = a_r \cdot q^{s-r}$

**Dodatek:** Podobně jako u aritmetické posloupnosti i teď platí, že nám už známý vzorec pro *n*-tý člen geometrické posloupnosti není nic jiného než speciální případ vzorce $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$, kdy dosadíme $s = n$ a $r = 1$.

**Př. 4:** V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dány členy $a_5 = \frac{5}{2}$, $a_{10} = 80$. Urči $q$, $a_1$ a $a_8$.

Dosadíme do vztahu mezi $a_r$ a $a_s$: $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$

$a_{10} = a_5 \cdot q^{10-5}$

$80 = \frac{5}{2} \cdot q^5 \quad / : 5$

$16 = \frac{q^5}{2}$

$q^5 = 32 \Rightarrow q = 2$

Teď určíme $a_1$:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \;\Rightarrow\; a_5 = a_1 \cdot q^{5-1}$

$\frac{5}{2} = a_1 \cdot 2^4$

$a_1 = \frac{5}{2^5} = \frac{5}{32}$

Teď už snadno dopočítáme libovolný člen posloupnosti, známe vzorec pro *n*-tý člen:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_8 = \frac{5}{32} \cdot 2^{8-1} = \frac{5 \cdot 2^7}{2^5} = 5 \cdot 4 = 20$

Pro zadanou posloupnost platí: $q = 2$, $a_1 = \frac{5}{32}$, $a_8 = 20$.

**Pedagogická poznámka:** V předchozím příkladu už někteří zoufalci mají zase problémy rozlišit $a_n$ a *n*.

**Dodatek:** Vzorec nevyžaduje, abychom do něj dosazovali za *s* větší číslo než za *r*. Například předchozí příklad můžeme počítat i takto: $a_s = a_r + (s-r)d$

$$a_5 = a_{10} \cdot q^{5-10}$$
$$\frac{5}{2} = 80 \cdot q^{-5}$$
$$q^5 = 32 \ \Rightarrow \ q = 2.$$

**Př. 5:** V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dány členy $a_4 = 1$, $a_9 = 9\sqrt{3}$. Urči $q$, $a_1$ a $a_6$.

Dosadíme do vztahu mezi $a_r$ a $a_s$: $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$

$$a_9 = a_4 \cdot q^{9-4}$$
$$9\sqrt{3} = 1 \cdot q^5$$
$$3^2\sqrt{3} = q^5$$
$$q = \sqrt[5]{3^2\sqrt{3}} = \sqrt[5]{3^2 3^{\frac{1}{2}}} = \left(3^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Teď určíme $a_1$:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \ \Rightarrow \ a_4 = a_1 \cdot q^{4-1}$$
$$1 = a_1 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3$$
$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{3^3}}$$

Teď už snadno dopočítáme libovolný člen posloupnosti, známe vzorec pro *n*-tý člen:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$a_6 = \frac{1}{\sqrt{3^3}} \cdot \sqrt{3}^{6-1} = \frac{\sqrt{3^5}}{\sqrt{3^3}} = \sqrt{3^2} = 3$$

Pro zadanou posloupnost platí: $q = \sqrt{3}$, $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3^3}}$, $a_6 = 3$.

Podobně jako u aritmetické i u geometrické posloupnosti dokážeme vzorcem sečíst prvních *n* členů.

Pro součet $s_n$ prvních $n$ členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tedy pro $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ platí:

a) je-li $q = 1$ $s_n = n \cdot a_1$

b) je-li $q \neq 1$ $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Uvedené vzorce nejsou na rozdíl od ostatních moc podobné vzorci pro aritmetickou posloupnost. Ani se k nim neváže žádná historka. Jejich důkaz však není obtížný.

Dokážeme:

a) je-li $q = 1$ $s_n = n \cdot a_1$

je-li $q=1$ pak pro všechny členy posloupnosti platí: $a_n = a_{n-1} = .... = a_2 = a_1 \Rightarrow$ sčítám *n*-krát stejnou hodnotu $a_1 \Rightarrow$ $s_n = \underbrace{a_1 + a_1 + ... + a_1}_{n-\text{krát}} = na_1$

b) je-li $q \neq 1$ $s_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q-1}$

Napíšeme si součet řady: $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$

Všechny členy v řadě vyjádříme pomocí vzorce pro *n*-tý člen: $s_n = a_1 + a_1 q + ... + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$

Předchozí rovnost si vynásobíme kvocientem *q*: $q \cdot s_n = a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$

Teď od sebe předchozí dvě rovnice odečteme:

$$q \cdot s_n = a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

$$s_n = a_1 + a_1 q + ... + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

$$q \cdot s_n - s_n = -a_1 + \underbrace{a_1 q - a_1 q}_{0} + \underbrace{a_1 q^2 - a_1 q^2}_{0} + ... + \underbrace{a_1 q^{n-1} - a_1 q^{n-1}}_{0} + a_1 q^n$$

$$s_n (q-1) = a_1 q^n - a_1 \quad / : (q-1)$$

$$s_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{(q-1)} = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$$

**Př. 6:** BONUS: Dokaž vzorec pro součet geometrické posloupnosti pro $q \neq 1$ pomocí matematické indukce.

Dokazujeme větu: Pro součet $s_n$ prvních *n* členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tedy pro $a_1 + a_2 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ platí: je-li $q \neq 1$ $s_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q-1}$.

**1. Ověříme vztah pro $n=1$**

sčítáme jediné číslo $a_1 = s_1$

dosadíme do vzorce: $s_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q-1} = a_1 \dfrac{q^1 - 1}{q-1} = a_1 \cdot 1 = a_1$

**2. Předpokládáme platnost vztahu pro $n=k$ a dokazujeme platnost pro $n=k+1$:**

Víme, že platí: $s_k = \dfrac{k}{2}(a_1 + a_k) = a_1 + a_2 + ... + a_k$ .

Chceme dokázat, že platí: $s_{k+1} = a_1 \dfrac{q^{k+1} - 1}{q-1}$

$s_{k+1}$ je součet členů posloupnosti: $s_{k+1} = a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1}$ .

Použijeme vzorec $s_k = a_1 \dfrac{q^k - 1}{q-1} = a_1 + a_2 + ... + a_k \Rightarrow s_{k+1} = s_k + a_{k+1}$

Napíšeme vztah: $s_{k+1} = s_k + a_{k+1} = a_1 \dfrac{q^k - 1}{q-1} + a_{k+1}$, vzorec pro $s_{k+1}$, který potřebujeme neobsahuje $a_{k+1} \Rightarrow$ tento člen musíme vyjádřit pomocí $a_1$ a $q \Rightarrow a_{k+1} = a_1 q^{k-1+1} = a_1 q^k$

$$s_{k+1} = a_1 \frac{q^k - 1}{q-1} + a_1 q^k = a_1 \left( \frac{q^k - 1}{q-1} + q^k \right) = a_1 \left( \frac{q^k - 1}{q-1} + \frac{q^k (q-1)}{q-1} \right) =$$

$$s_{k+1}=a_1\left(\frac{q^k-1+q^{k+1}-q^k}{q-1}\right)=a_1\frac{q^{k+1}-1}{q-1}$$ - hotovo

**Př. 7:** Urči součet:
a) prvních osmi členů geometrické řady $a_1=2$ $q=\sqrt{3}$
b) prvních osmi členů geometrické řady $a_1=2$ $q=-2$
c) všech mocnin dvou menších než 100
Součet určený v bodu c) vzorce zkontroluj pomocí kalkulačky.

a) součet prvních osmi členů geometrické řady $a_1=2$ $q=\sqrt{3}$

Jenom dosadíme do vzorce: $s_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$

$$s_8=2\cdot\frac{\sqrt{3}^8-1}{\sqrt{3}-1}=2\cdot\frac{3^4-1}{\sqrt{3}-1}=2\frac{81-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{160}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\frac{160\left(\sqrt{3}+1\right)}{3-1}=80\left(\sqrt{3}+1\right)$$

b) součet prvních osmi členů geometrické řady $a_1=2$ $q=-2$

Jenom dosadíme do vzorce: $s_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$

$$s_8=2\cdot\frac{(-2)^8-1}{(-2)-1}=2\cdot\frac{256-1}{-3}=-2\frac{255}{3}=-2\cdot 85=-170$$

c) všech mocnin dvou menších než 100
největší mocnina dvou menší než 100 je $64=2^6$
určujeme tedy součet: $1+2+4+..+64$
Jde o geometrickou posloupnost: $a_1=1$, $q=2$, chceme $s_7$ (64 je sedmý člen)

$$s_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$$

$$s_7=1\frac{2^7-1}{2-1}=\frac{128-1}{1}=127$$

Součet všech mocnin dvou menších než 100 je 127.
Kalkulačka potvrdí náš výpočet.

**Př. 8:** Je možné, aby součet prvních *n* členů geometrické posloupnosti, jejíž žádný člen není roven nule, byl nulový? Pokud ano, za jakých podmínek?

Takovou posloupností může být například posloupnost: $-1;1;-1;1;-1;1;...$
Její součet je: $-1+1-1+1-1+1-1+...$ $\Rightarrow$ pokud je v součtu sudý počet členů, je součet nulový.
Podmínku ze zadání splňuje každá geometrická posloupnost: $a_1;q=-1$, pokud sčítáme sudý počet členů (tedy pokud platí $n=2k$).

**Př. 9:** Urči číslo *x* tak, aby čísla $a_1 = 1$, $a_2 = 2^x$, $a_3 = 7 \cdot 2^x - 10$ tvořila tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Urči tuto posloupnost.

Pro po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti musí platit: $a_{n+1} = a_n \cdot q$. Protože všechna zadaná čísla jsou různá od nuly můžeme psát i $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Dosadíme: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow \frac{2^x}{1} = \frac{7 \cdot 2^x - 10}{2^x} \quad / \cdot 2^x$

Získali jsme exponenciální rovnici: $\left(2^x\right)^2 = 7 \cdot 2^x - 10$

$\left(2^x\right)^2 - 7 \cdot 2^x + 10 = 0$ , provedeme substituci $y = 2^x$

$y^2 - 7y + 10 = 0$

$(y-2)(y-5) = 0$

$y_1 = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1,\ q = \frac{2^x}{1} = \frac{2}{1} = 2$

jde o geometrickou posloupnost: $a_1 = 1,\ q = 2 \Rightarrow 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

$y_2 = 5 \Rightarrow 2^x = 5 \Rightarrow x = \log_2 5,\ q = \frac{2^x}{1} = \frac{5}{1} = 5$

jde o geometrickou posloupnost: $a_1 = 1,\ q = 5 \Rightarrow 1, 5, 25, 125, 625, \ldots$

**Př. 10:** Petáková:
strana 67/cvičení 14
strana 68/cvičení 16 a)
strana 68/cvičení 18

**Shrnutí:** Pro členy geometrické posloupnosti platí podobné vzorce jako pro členy aritmetické posloupnosti.