

## 8.2.7 Vzorce pro geometrickou posloupnost

**Předpoklady:** 8202, 8206

**Př. 1:** Pro geometrickou posloupnost platí  $a_5 = \frac{1}{2}$ ;  $q = 2$ . Urči člen  $a_9$ , aniž bys určoval  $a_1$ .

Mohli bychom pomocí vzorce pro  $n$ -tý člen určit člen  $a_1$  a pak pomocí stejného vzorce určit i  $a_9$ . Tento postup zakazuje zadání příkladu a je složitější.

Zkusíme to jinak:

Abych se od členu  $a_5$  dostal ke členu  $a_9$ , musím čtyřikrát ( $9 - 5 = 4$ ) násobit kvocientem  $\Rightarrow$

$$a_9 = a_5 \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = a_5 \cdot q^4 = \frac{1}{2} \cdot 2^4 = 2^3 = 8$$

Člen  $a_9$  se rovná 8.

**Př. 2:** V geometrické posloupnosti s kvocientem  $q$  vypočítej hodnotu členu  $a_s$ , pokud znáš hodnotu  $a_r$ .

Je to stejný příklad jako předchozí, akorát počítáme v písmenkách.

Člen  $a_r$  násobím kvocientem  $q$  a to  $(s - r)$  krát  $\Rightarrow a_s = a_r \cdot q^{s-r}$ .

Vzorec funguje i pro výpočet předchozího členu. Dosadíme hodnoty z příkladu 1:

$$d = 2, a_9 = 8, \text{ počítáme člen } a_5 = a_9 \cdot q^{5-9} = 8 \cdot 2^{-4} = \frac{1}{2}.$$

V geometrické posloupnosti  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  s kvocientem  $q$  platí pro všechna  $r, s \in \mathbb{N}$   
 $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$  ..

Vzorec je možné snadno interpretovat slovně: určitý člen v posloupnosti vypočtu z libovolného předchozího tak, že ho vynásobím kvocientem tolikrát, o kolik je jeho index větší. (při výpočtu z libovolného následujícího kvocientem dělím).

**Př. 3:** (BONUS) Dokaž pomocí vzorce pro  $n$ -tý člen aritmetické posloupnosti platnost vzorce  $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$ .

Pro členy posloupnosti ve vzorci platí:

$$a_r = a_1 \cdot q^{r-1}$$

$$a_s = a_1 \cdot q^{s-1}$$

Rovnice vydělíme:

$$\frac{a_s}{a_r} = \frac{a_1 \cdot q^{s-1}}{a_1 \cdot q^{r-1}}$$

$$\frac{a_s}{a_r} = q^{s-1-(r-1)}$$

$$a_s = a_r \cdot q^{s-r}$$

Předchozí postup je pochopitelný, ale také lehce napadnutelný. Při jeho použití dělíme a museli bychom tedy zajistit, aby všechna čísla v první rovnici byla nenulová. Většinou se používá jiný postup:

$$a_s = a_1 \cdot q^{s-1}$$

určitě platí:  $s-1 = s-r+r-1$

$$a_s = a_1 \cdot q^{s-r+r-1} = a_1 \cdot q^{s-r} \cdot q^{r-1} = (a_1 \cdot q^{r-1}) \cdot q^{s-r} = a_r \cdot q^{s-r}$$

**Dodatek:** Podobně jako u aritmetické posloupnosti i teď platí, že nám už známý vzorec pro  $n$ -tý člen geometrické posloupnosti není nic jiného než speciální případ vzorce  $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$ , kdy dosadíme  $s = n$  a  $r = 1$ .

**Př. 4:** V geometrické posloupnosti  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  jsou dány členy  $a_5 = \frac{5}{2}$ ,  $a_{10} = 80$ . Urči  $q$ ,  $a_1$  a  $a_8$ .

Dosadíme do vztahu mezi  $a_r$  a  $a_s$ :  $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$

$$a_{10} = a_5 \cdot q^{10-5}$$

$$80 = \frac{5}{2} \cdot q^5 \quad / : 5$$

$$16 = \frac{q^5}{2}$$

$$q^5 = 32 \Rightarrow q = 2$$

Teď určíme  $a_1$ :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^{5-1}$$

$$\frac{5}{2} = a_1 \cdot 2^4$$

$$a_1 = \frac{5}{2^5} = \frac{5}{32}$$

Teď už snadno dopočítáme libovolný člen posloupnosti, známe vzorec pro  $n$ -tý člen:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_8 = \frac{5}{32} \cdot 2^{8-1} = \frac{5 \cdot 2^7}{2^5} = 5 \cdot 4 = 20$$

Pro zadanou posloupnost platí:  $q = 2$ ,  $a_1 = \frac{5}{32}$ ,  $a_8 = 20$ .

**Pedagogická poznámka:** V předchozím příkladu už někteří zoufalci mají zase problémy rozlišit  $a_n$  a  $n$ .

**Dodatek:** Vzorec nevyžaduje, abychom do něj dosazovali za  $s$  větší číslo než za  $r$ . Například předchozí příklad můžeme počítat i takto:  $a_s = a_r + (s-r)d$

$$a_5 = a_{10} \cdot q^{5-10}$$

$$\frac{5}{2} = 80 \cdot q^{-5}$$

$$q^5 = 32 \Rightarrow q = 2.$$

**Př. 5:** V geometrické posloupnosti  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  jsou dány členy  $a_4 = 1$ ,  $a_9 = 9\sqrt{3}$ . Urči  $q$ ,  $a_1$  a  $a_6$ .

Dosadíme do vztahu mezi  $a_r$  a  $a_s$ :  $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$

$$a_9 = a_4 \cdot q^{9-4}$$

$$9\sqrt{3} = 1 \cdot q^5$$

$$3^2 \sqrt{3} = q^5$$

$$q = \sqrt[5]{3^2 \sqrt{3}} = \sqrt[5]{3^2 3^{\frac{1}{2}}} = \left(3^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Ted' určíme  $a_1$ :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^{4-1}$$

$$1 = a_1 \cdot (\sqrt{3})^3$$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{3^3}}$$

Ted' už snadno dopočítáme libovolný člen posloupnosti, známe vzorec pro  $n$ -tý člen:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_6 = \frac{1}{\sqrt{3^3}} \cdot \sqrt{3}^{6-1} = \frac{\sqrt{3^5}}{\sqrt{3^3}} = \sqrt{3^2} = 3$$

Pro zadanou posloupnost platí:  $q = \sqrt{3}$ ,  $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3^3}}$ ,  $a_6 = 3$ .

Podobně jako u aritmetické i u geometrické posloupnosti dokážeme vzorcem sečíst prvních  $n$  členů.

Pro součet  $s_n$  prvních  $n$  členů geometrické posloupnosti  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ , tedy pro

$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$  platí:

a) je-li  $q = 1$   $s_n = n \cdot a_1$

b) je-li  $q \neq 1$   $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Uvedené vzorce nejsou na rozdíl od ostatních moc podobné vzorci pro aritmetickou posloupnost. Ani se k nim neváže žádná historka. Jejich důkaz však není obtížný.

Dokážeme:

a) je-li  $q = 1$   $s_n = n \cdot a_1$

je-li  $q = 1$  pak pro všechny členy posloupnosti platí:  $a_n = a_{n-1} = \dots = a_2 = a_1 \Rightarrow$  sčítám  $n$ -krát stejnou hodnotu  $a_1 \Rightarrow s_n = \underbrace{a_1 + a_1 + \dots + a_1}_{n\text{-krát}} = na_1$

b) je-li  $q \neq 1$   $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Napíšeme si součet řady:  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$

Všechny členy v řadě vyjádříme pomocí vzorce pro  $n$ -tý člen:  $s_n = a_1 + a_1q + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$

Předchozí rovnost si vynásobíme kvocientem  $q$ :  $q \cdot s_n = a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$

Ted' od sebe předchozí dvě rovnice odečteme:

$$q \cdot s_n = a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

$$s_n = a_1 + a_1q + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$$

$$q \cdot s_n - s_n = \underbrace{-a_1}_0 + \underbrace{a_1q - a_1q}_0 + \underbrace{a_1q^2 - a_1q^2}_0 + \dots + \underbrace{a_1q^{n-1} - a_1q^{n-1}}_0 + a_1q^n$$

$$s_n(q - 1) = a_1q^n - a_1 \quad / : (q - 1)$$

$$s_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{(q - 1)} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

**Př. 6:** BONUS: Dokaž vzorec pro součet geometrické posloupnosti pro  $q \neq 1$  pomocí matematické indukce.

Dokazujeme větu: Pro součet  $s_n$  prvních  $n$  členů geometrické posloupnosti  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ , tedy pro

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \text{ platí: je-li } q \neq 1 \quad s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

**1. Ověříme vztah pro  $n = 1$**

sčítáme jediné číslo  $a_1 = s_1$

dosadíme do vzorce:  $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{q^1 - 1}{q - 1} = a_1 \cdot 1 = a_1$

**2. Předpokládáme platnost vztahu pro  $n = k$  a dokazujeme platnost pro  $n = k + 1$ :**

Víme, že platí:  $s_k = \frac{k}{2}(a_1 + a_k) = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ .

Chceme dokázat, že platí:  $s_{k+1} = a_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$

$s_{k+1}$  je součet členů posloupnosti:  $s_{k+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1}$ .

Použijeme vzorec  $s_k = a_1 \frac{q^k - 1}{q - 1} = a_1 + a_2 + \dots + a_k \Rightarrow s_{k+1} = s_k + a_{k+1}$

Napíšeme vztah:  $s_{k+1} = s_k + a_{k+1} = a_1 \frac{q^k - 1}{q - 1} + a_{k+1}$ , vzorec pro  $s_{k+1}$ , který potřebujeme

neobsahuje  $a_{k+1} \Rightarrow$  tento člen musíme vyjádřit pomocí  $a_1$  a  $q \Rightarrow a_{k+1} = a_1q^{k-1+1} = a_1q^k$

$$s_{k+1} = a_1 \frac{q^k - 1}{q - 1} + a_1q^k = a_1 \left( \frac{q^k - 1}{q - 1} + q^k \right) = a_1 \left( \frac{q^k - 1}{q - 1} + \frac{q^k(q - 1)}{q - 1} \right) =$$

$$s_{k+1} = a_1 \left( \frac{q^k - 1 + q^{k+1} - q^k}{q-1} \right) = a_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q-1} \quad - \text{ hotovo}$$

**Př. 7:** Urči součet:

a) prvních osmi členů geometrické řady  $a_1 = 2$   $q = \sqrt{3}$

b) prvních osmi členů geometrické řady  $a_1 = 2$   $q = -2$

c) všech mocnin dvou menších než 100

Součet určený v bodu c) vzorce zkontroluj pomocí kalkulačky.

a) součet prvních osmi členů geometrické řady  $a_1 = 2$   $q = \sqrt{3}$

Jenom dosadíme do vzorce:  $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$

$$s_8 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}^8 - 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 \cdot \frac{3^4 - 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 \frac{81 - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{160}{\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{160(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} = 80(\sqrt{3} + 1)$$

b) součet prvních osmi členů geometrické řady  $a_1 = 2$   $q = -2$

Jenom dosadíme do vzorce:  $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$

$$s_8 = 2 \cdot \frac{(-2)^8 - 1}{(-2) - 1} = 2 \cdot \frac{256 - 1}{-3} = -2 \frac{255}{3} = -2 \cdot 85 = -170$$

c) všech mocnin dvou menších než 100

největší mocnina dvou menší než 100 je  $64 = 2^6$

určujeme tedy součet:  $1 + 2 + 4 + \dots + 64$

Jde o geometrickou posloupnost:  $a_1 = 1$ ,  $q = 2$ , chceme  $s_7$  (64 je sedmý člen)

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$$

$$s_7 = 1 \frac{2^7 - 1}{2-1} = \frac{128-1}{1} = 127$$

Součet všech mocnin dvou menších než 100 je 127.

Kalkulačka potvrdí náš výpočet.

**Př. 8:** Je možné, aby součet prvních  $n$  členů geometrické posloupnosti, jejíž žádný člen není roven nule, byl nulový? Pokud ano, za jakých podmínek?

Takovou posloupností může být například posloupnost:  $-1; 1; -1; 1; -1; 1; \dots$

Její součet je:  $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \Rightarrow$  pokud je v součtu sudý počet členů, je součet nulový.

Podmínku ze zadání splňuje každá geometrická posloupnost:  $a_1; q = -1$ , pokud sčítáme sudý počet členů (tedy pokud platí  $n = 2k$ ).

**Př. 9:** Urči číslo  $x$  tak, aby čísla  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2^x$ ,  $a_3 = 7 \cdot 2^x - 10$  tvořila tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Urči tuto posloupnost.

Pro po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti musí platit:  $a_{n+1} = a_n \cdot q$ . Protože všechna zadaná čísla jsou různá od nuly můžeme psát i  $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ .

$$\text{Dosadíme: } q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow \frac{2^x}{1} = \frac{7 \cdot 2^x - 10}{2^x} \quad / \cdot 2^x$$

Získali jsme exponenciální rovnici:  $(2^x)^2 = 7 \cdot 2^x - 10$

$$(2^x)^2 - 7 \cdot 2^x + 10 = 0, \text{ provedeme substituci } y = 2^x$$

$$y^2 - 7y + 10 = 0$$

$$(y - 2)(y - 5) = 0$$

$$y_1 = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1, q = \frac{2^x}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

jde o geometrickou posloupnost:  $a_1 = 1$ ,  $q = 2 \Rightarrow 1, 2, 4, 8, 16, \dots$

$$y_2 = 5 \Rightarrow 2^x = 5 \Rightarrow x = \log_2 5, q = \frac{2^x}{1} = \frac{5}{1} = 5$$

jde o geometrickou posloupnost:  $a_1 = 1$ ,  $q = 5 \Rightarrow 1, 5, 25, 125, 625, \dots$

**Př. 10:** Petáková:

strana 67/cvičení 14

strana 68/cvičení 16 a)

strana 68/cvičení 18

**Shrnutí:** Pro členy geometrické posloupnosti platí podobné vzorce jako pro členy aritmetické posloupnosti.