8.2.6 Geometrická posloupnost

Předpoklady: 8101, 8102, 8103, 8107

Pedagogická poznámka: V hodině rozdělím třídu na dvě skupiny a každá z nich dělá jeden z prvních dvou příkladů.

Př. 1: Poločas rozpadu (doba za kterou se rozpadne polovina existujícího množství látky) francia $^{221}_{87}\mathrm{Fr}$ je přibližně 5 minut. Jaké množství látky po půl hodině z 10gramů?

Budeme sledovat množství francia vždy po pěti minutách:

počáteční množství … $a_1 = 10$

po 5 minutách … $a_2 = 10 \cdot \frac{1}{2}$

po 10 minutách … $a_3 = \left(10 \cdot \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = 10\left(\frac{1}{2}\right)^2$

po 15 minutách … $a_4 = \left[10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\frac{1}{2} = 10\left(\frac{1}{2}\right)^3$

po 20 minutách … $a_5 = \left[10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3\right]\frac{1}{2} = 10\left(\frac{1}{2}\right)^4$

po 25 minutách … $a_6 = \left[10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4\right]\frac{1}{2} = 10\left(\frac{1}{2}\right)^5$

po 30 minutách … $a_7 = \left[10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5\right]\frac{1}{2} = 10\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{10}{2^6} = \frac{10}{64} = \frac{5}{32} \doteq 0{,}16\,\mathrm{g}$

Po 30 minutách zbude z původních 10 gramů pouze 0,16 gramu francia $^{221}_{87}\mathrm{Fr}$.

Př. 2: Hodnotu peněz neustále snižuje inflace (pomalé průběžné zdražování všech komodit). Například při dlouhodobé průměrné roční inflaci 3% ztratí libovolná částka za rok 3% své hodnoty (tedy na příklad 200 Kč na začátku roku bude mít na konci hodnotu pouze $200 \cdot 0{,}97 = 194$ Kč). Jako hodnotu bude mít 500 000 Kč po uplynutí pěti let?

Postupujeme podobně jako v předchozím příkladě, postupně počítáme hodnotu peněz po jednotlivých letech:

počáteční hodnota … $n_1 = 500000$

po 1. roce … $n_2 = 500000 \cdot 0{,}97$

po 2. letech … $n_3 = (500000 \cdot 0{,}97) \cdot 0{,}97 = 500000 \cdot 0{,}97^2$

po 3. letech … $n_4 = \left(500000 \cdot 0{,}97^2\right) \cdot 0{,}97 = 500000 \cdot 0{,}97^3$

po 4. letech … $n_5 = \left(500000 \cdot 0{,}97^3\right) \cdot 0{,}97 = 500000 \cdot 0{,}97^4$

po 5. letech … $n_6 = \left(500000 \cdot 0{,}97^4\right) \cdot 0{,}97 = 500000 \cdot 0{,}97^5 = 429367$

Po pěti letech bude mít 500 000 při 3% roční inflaci hodnotu pouze 429367 Kč.

Př. 3: Najdi společnou speciální vlastnost obou předchozích posloupností.

U obou předchozích posloupností platí, že další člen získáme vynásobením aktuálního členu stále stejným číslem. Při určování dalších členů neustále násobíme stejným číslem.

Posloupnost s uvedenou vlastností se nazývá **geometrická**.

> Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá geometrická právě když existuje takové reálné číslo *q*, že pro každé přirozené číslo *n* platí $a_{n+1} = a_n \cdot q$. Číslo ***q*** se nazývá **kvocient posloupnosti**.

Jestliže v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí $a_1 \neq 0$ a zároveň $q \neq 0$, pak jsou všechny členy posloupnosti různé od nuly a můžeme psát $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, tedy podíl dvou po sobě následujících členů geometrické posloupnosti je konstantní a rovný jejímu kvocientu.

Př. 4: Urči kvocienty geometrických posloupností z příkladů 1 a 2.

a) v příkladu 1 platí: $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

b) v příkladu 2 platí: $a_{n+1} = a_n \cdot 0,97 \Rightarrow q = 0,97$

Př. 5: Rozhodni, zda daná tři čísla tvoří tři po sobě jdoucí členy nějaké geometrické posloupnosti. Pokud ano urči kvocient.

a) $\frac{9}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{9}$

b) $\sqrt{5}-\sqrt{3}; \sqrt{2}; \sqrt{5}+\sqrt{3}$

pokud zadaná trojice čísel tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti, musí být jejich podíl stejné číslo

a) $\frac{9}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{9}$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{4}} = \frac{2}{9} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{9}$$

Jde o tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti s kvocientem $\frac{2}{9}$.

b) $\sqrt{5}-\sqrt{3}; \sqrt{2}; \sqrt{5}+\sqrt{3}$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$$

Jde o tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti s kvocientem $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$.

Pedagogická poznámka: S předchozím příkladem mají studenti opět nečekané problémy, hlavně u bodu b) se pak objevují problémy s upravením výrazu.

Př. 6: Napiš prvních pět členů geometrických posloupností:
a) $a_1=1$, $q=-2$
b) $a_1=\pi$, $q=0$
c) $a_1=5$, $q=-1$
d) $a_1=0$, $q=0$
Které z těchto posloupností jsou aritmetické?

a) $a_1=1$, $q=-2$
členy posloupnosti: $1;-2;4;-8;16;...$ $\Rightarrow$ není aritmetická

b) $a_1=\pi$, $q=0$
členy posloupnosti: $\pi;0;0;0;0;...$ $\Rightarrow$ není aritmetická

c) $a_1=5$, $q=-1$
členy posloupnosti: $5;-5;5;-5;5;...$ $\Rightarrow$ není aritmetická

d) $a_1=0$, $q=0$
členy posloupnosti: $0;0;0;0;0;...$ $\Rightarrow$ je aritmetická s diferencí 0

Př. 7: Dokaž, že posloupnost $\left(5\cdot 2^{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická.

Hledáme v definici geometrické posloupnosti podmínku, která odlišuje geometrickou posloupnost od ostatních posloupností $\Rightarrow$ musíme dokázat, že platí: $a_{n+1}=a_n\cdot q$.

$a_n=5\cdot 2^{n+1}$

$a_{n+1}=5\cdot 2^{(n+1)+1}=5\cdot 2^{n+2}$

Dosadíme: $5\cdot 2^{n+2}=5\cdot 2^{n+1}\cdot q \quad /:5$

$2\cdot 2^{n+1}=2^{n+1}\cdot q \quad /:2^{n+1}$

$2=q$

Vztah $a_{n+1}=a_n\cdot q$ platí pro všechny členy posloupnosti $\Rightarrow$ posloupnost $\left(5\cdot 2^{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická (s kvocientem 2).

Geometrická posloupnost je stejně pravidelná jako aritmetická $\Rightarrow$ měl by existovat vzorec pro *n*-tý člen.

Př. 8: Najdi vzorec pro *n*-tý člen posloupností z příkladů 1 a 2. Vyslov hypotézu o vzorci aritmetické posloupnosti: $a_1; a_{n+1} = a_n \cdot q; n \in N$.

a) členy posloupnosti mám již vlastně upravené, aby byl každý vyjádřen pomocí a_1 a *d*:

počáteční množství	…	$a_1 = 10$
po 5 minutách	…	$a_2 = 10 \cdot \frac{1}{2}$
po 10 minutách	…	$a_3 = \left(10 \cdot \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = 10\left(\frac{1}{2}\right)^2$
po 15 minutách	…	$a_4 = \left[10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\frac{1}{2} = 10\left(\frac{1}{2}\right)^3$
po 20 minutách	…	$a_5 = \left[10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3\right]\frac{1}{2} = 10\left(\frac{1}{2}\right)^4$
po 25 minutách	…	$a_6 = \left[10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4\right]\frac{1}{2} = 10\left(\frac{1}{2}\right)^5$
po 30 minutách	…	$a_7 = \left[10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5\right]\frac{1}{2} = 10\left(\frac{1}{2}\right)^6$

….

$a_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{2} = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Zdá se, že posloupnost by mohla být dána vzorcem $\left[10\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]_{n=1}^{\infty}$.

b) členy posloupnosti mám již vlastně upravené, aby byl každý vyjádřen pomocí a_1 a *d*:

počáteční hodnota	…	$n_1 = 500000$
po 1. roce	…	$n_2 = 500000 \cdot 0,97$
po 2. letech	…	$n_3 = (500000 \cdot 0,97) \cdot 0,97 = 500000 \cdot 0,97^2$
po 3. letech	…	$n_4 = (500000 \cdot 0,97^2) \cdot 0,97 = 500000 \cdot 0,97^3$
po 4. letech	…	$n_5 = (500000 \cdot 0,97^3) \cdot 0,97 = 500000 \cdot 0,97^4$
po 5. letech	…	$n_6 = (500000 \cdot 0,97^4) \cdot 0,97 = 500000 \cdot 0,97^5$

….

$n_n = n_{n-1} \cdot q = 500000 \cdot 0,97^{n-1}$

Zdá se, že posloupnost by mohla být dána vzorcem $\left[500000 \cdot 0,97^{n-1}\right]_{n=1}^{\infty}$.

Oba odvozené vzorce mají stejný tvar: $a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow$ zřejmě platí: geometrická posloupnost je dána vzorcem $\left[a_1 \cdot q^{n-1}\right]_{n=1}^{\infty}$

O správnosti naší hypotézy se musíme přesvědčit. Zkusíme důkaz matematickou indukcí:

Př. 9: Dokaž větu: V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q platí pro každé $n \in N$ $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

1. Ověříme platnost pro $n = 1$

$a_1 = a_1 \cdot q^{1-1} = a_1 \cdot q^0 = a_1 \Rightarrow$ pro $n = 1$ vzorec platí

2. Předpokládáme, že vzorec platí pro k **a dokazujeme, že platí i pro** $k+1$

Víme: $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$

Chceme dokázat: $a_{k+1} = a_1 \cdot q^{(k+1)-1} = a_1 \cdot q^k$

Určitě platí rekurentní vztah pro geometrickou posloupnost: $a_{k+1} = a_k \cdot q$

Dosadíme do rekurentního vyjádření za $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$:

$a_{k+1} = a_k \cdot q = a_1 \cdot q^{k-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{k-1+1} = a_1 \cdot q^k$ - to jsme chtěli

Podařilo se nám vztah dokázat.

Pedagogická poznámka: Pokud nestíháme, předchozí příklad vynecháváme a důkaz buď rychle udělám na tabuli nebo ho úplně přeskočíme.

Teď už můžeme napsat s jistotou:

V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q platí pro každé $n \in N$ $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Vzorec je hodně podobný vzorci pro aritmetickou posloupnost, opět v něm vystupuje člen $(n-1)$, protože člen a_1 jsme kvocientem ještě nenásobili.

Vzorec geometrické posloupnosti připomíná předpis exponenciální funkce $\Rightarrow$ geometrická posloupnost je speciálním případem exponenciální funkce.

Př. 10: U následujících aritmetických posloupností sestav vzorec pro *n*-tý člen, najdi rekurentní vyjádření a urči a_6.

a) $a_1 = 2$, $q = 2$

b) $a_3 = 1; q = \frac{1}{3}$

c) $\left[3(-1)^{n-1}\right]_{n=1}^{\infty}$

d) $a_1 = \sqrt{3}; a_{n+1} = a_n \cdot \sqrt{3}; n \in N$

e) $\left[3^n\right]_{n=1}^{\infty}$

a) $a_1 = 2$, $q = 2$

rekurentní vyjádření: $a_1 = 2; a_{n+1} = a_n \cdot 2, n \in N$

vzorec pro *n*-tý člen: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

$a_6 = 2^6 = 64$

b) $a_3 = 1; q = \frac{1}{3}$

nejdříve si určíme a_1: $a_3 = a_2 \cdot q \Rightarrow a_2 = \frac{a_3}{q} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9$

rekurentní vyjádření: $a_1 = 9; a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{3}, n \in N$

vzorec pro n-tý člen: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$

$a_6 = \left(\frac{1}{3}\right)^{6-3} = \frac{1}{27}$

c) $\left[3(-1)^{n-1}\right]_{n=1}^{\infty}$

posloupnost je zadaná vzorcem pro n-tý člen $\Rightarrow$ $a_1 = 3,\ q = -1$

rekurentní vyjádření: $a_1 = 3; a_{n+1} = a_n \cdot (-1), n \in N$

vzorec pro n-tý člen už máme

$a_3 = 3 \cdot (-1)^5 = -3$

d) $a_1 = \sqrt{3}; a_{n+1} = a_n \cdot \sqrt{3}; n \in N$

rekurentní vyjádření už máme

$a_1 = \sqrt{3},\ q = \sqrt{3}$

vzorec pro n-tý člen: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}^{n-1} = \sqrt{3}^n$

$a_6 = \sqrt{3}^6 = 27$

e) $\left[3^n\right]_{n=1}^{\infty}$

pozor, to není klasický vzorec pro n-tý člen $\Rightarrow$ musíme vztah upravit do tvaru vzorce pro n-tý člen

$3^n = 3 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow a_1 = 3,\ q = 3$

rekurentní vyjádření: $a_1 = 3; a_{n+1} = a_n \cdot 3; n \in N$

vzorec pro n-tý člen: $\left(3 \cdot 3^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$

$a_6 = 3^6$

Př. 11: Petáková:
strana 67/cvičení 9 b) c)
strana 67/cvičení 10 b)
strana 67/cvičení 12 a) c) d)

Shrnutí: Posloupnost v níž každý člen získáme z členu předchozího vynásobením stejným číslem se nazývá geometrická. Při výpočtu jejího n-tého členu násobíme první člen $(n-1)$ mocninou kvocientu.