

8.2.4 Užítí aritmetických posloupností

Předpoklady: 8201,8202

Př. 1: S hloubkou roste teplota Země přibližně rovnoměrně o 30°C na 1000 m. Jaká bude teplota na dně dolu hlubokého 900 m, je-li v hloubce 25 m teplota 9°C ? Jaký by byla teplota na dně jednoho z nejhlubších dolů na světě TauTona v JAR v hloubce 3585 m. Porovnej vypočítanou teplotu s teplotou uváděnou v literatuře a vysvětli rozdíl

Ze zadání známe teplotu ve dvou hloubkách:

$$\text{v hloubce 25 m} \quad \dots \quad a_{25} = 9$$

$$\text{v hloubce 1025 m} \quad \dots \quad a_{1025} = 39 \quad (\text{hloubka o 1000 větší} \Rightarrow \text{teplota o } 30^{\circ}\text{C vyšší})$$

Pomocí vztahu mezi a_s a a_r můžeme určit diferenci posloupnosti:

$$a_s = a_r + (s - r)d \Rightarrow a_{1025} = a_{25} + (1025 - 25)d$$

$$39 = 9 + 1000d$$

$$d = \frac{3}{100}$$

Teď snadno určíme pomocí stejného vzorce teplotu v libovolné jiné hloubce:

$$a_{900} = a_{25} + (900 - 25)d = 9 + 875 \cdot \frac{3}{100} = 35,25^{\circ}\text{C}$$

$$a_{3585} = a_{25} + (3585 - 25)d = 9 + 3565 \cdot \frac{3}{100} = 115,95^{\circ}\text{C}$$

Za předpokladu, že teplota zemské kůry roste s hloubkou způsobem udaným v zadání by v hloubce 900 metrů byla teplota $35,25^{\circ}\text{C}$, v hloubce 3585 metrů pak $115,95^{\circ}\text{C}$.

Druhý výsledek je zjevně nereálný. Při takové teplotě by bylo pro horníky asi nemožné pracovat. V literatuře se uvádí, že v nejnižších patrech zmiňovaného dolu TauTona je teplota horniny kolem 60°C , teplota vzduchu pak dosahuje asi 55°C , klimatizací je snižována na přijatelných 35°C .

Důvody zjištěného rozdílu jsou zřejmě dva:

1. Uvedený vzrůst teploty s hloubkou se týká pouze vrchní vrstvy zemské kůry, později roste rychlost podstatně pomaleji (většina tepla do zemské kůry neproniká z pláště, ale vzniká v kůře rozpadem radioaktivních prvků, jejich obsah je nejvyšší ve vyšších vrstvách).
2. Tepelná vodivost většiny hornin je velmi malá a tak je možné pomocí klimatizace ochladit povrch na nižší teplotu.

Pedagogická poznámka: Všechny následující příklady pocházejí z klasické učebnice od Doc. Odvárka. Za celý večer se mi nepodařilo vymyslet jiný reálný příklad, který by nebyl pouhou kopií se změněnými čísly. Pokud by autor učebnice protestoval mohu příklady samozřejmě stáhnout a nahradit analogiemi, ale sám vnímám tento fakt jako ocenění jeho práce, protože opravdu nenechal příliš věcí, které bych mohl změnit.

Pedagogická poznámka: Všechny dále uvedené příklady není v silách většiny studentů stihnout. Příklady tvoří podobné dvojice (příklady 2 a 3 a příklady 4 a 5). Řeším to

tak, že studenti vždy řeší celý příklad 2 a 4. Příklady 3 a 5 pouze načínáme (uděláme soupis toho, jaký význam mají jednotlivá čísla v zadání z hlediska posloupností). Příklad 7 většina studentů není schopná vyřešit sama, takže v případě, že jej nestihneme ve škole, se nic strašného neděje, protože v případě zájmu si mohou příklad dostudovat doma.

Př. 2: V obchodě staví propagační pyramidu z plechovek. Kolik plechovek bude na pyramidu potřeba pokud nejnižší řada obsahuje 25 plechovek a každá další řada má o jednu plechovku méně?

Napíšeme si, jaký význam mají jednotlivé zadané hodnoty z hlediska posloupností. Zbytek příkladu je pak pouhým dosazováním do vzorců.

$a_1 = 25$ - počet plechovek v nejnižší řadě

$a_n = 1$ - v poslední řadě je jediná plechovka

$d = -1$ - v každé další řadě je o jednu plechovku méně

$s_n = ?$ - chceme určit počet plechovek ve všech řadách

Určíme n pomocí vzorce pro n -tý člen: $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$1 = 25 + (n-1)(-1)$$

$$24 = (n-1)$$

$$n = 25$$

Teď můžeme dosadit do vzorce pro s_n :

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{25}{2}(25 + 1) = 325$$

Na stavbu pyramidy bude třeba 325 plechovek.

Z předchozích příkladů je dobře vidět, jakým způsobem se používají posloupnosti při řešení slovních úloh. Pokud je slovní úloha převoditelná na aritmetickou posloupnost stačí, když provedeme přiřazení zadaných hodnot k jednotlivým členům posloupností (případně součtu prvních n členů, diferenci ...).

Př. 3: Část střechy domu má tvar lichoběžníku a je třeba pokrýt taškami. Víme, že do řady u hřebenu se vejde 85 tašek, do spodní řady při okapu 105 tašek. Při tom jsou tašky srovnány do řad tak, aby v každé následující řadě bylo o jednu tašku více než v řadě předchozí. Kolik je třeba tašek na pokrytí části střechy?

Napíšeme si, jaký význam mají jednotlivé zadané hodnoty z hlediska posloupností. Zbytek příkladu je pak pouhým dosazováním do vzorců.

$a_1 = 85$ - počet tašek v nejvyšší řadě

$a_n = 105$ - počet tašek v nejnižší řadě

$d = 1$ - v každé další řadě je o jednu tašku více

$s_n = ?$ - chceme určit počet tašek ve všech řadách

Určíme n pomocí vzorce pro n -tý člen: $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$105 = 85 + (n-1)1$$

$$20 = (n-1)$$

$$n = 21$$

Ted' můžeme dosadit do vzorce pro s_n :

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{21}{2}(85 + 105) = 1995$$

Na pokrytí střechy budeme potřebovat 1995 tašek.

Př. 4: Ocelové roury se skládají do vrstev tak, že roury každé horní vrstvy zapadají do mezer dolní vrstvy. Do kolika vrstev se složí 95 rour, je-li v nejvyšší vrstvě 5 rour? Kolik rour je v nejnižší vrstvě?

Napíšeme si, jaký význam mají jednotlivé zadané hodnoty z hlediska posloupností. Zbytek příkladu je pak pouhým dosazováním do vzorců.

$a_1 = ?$ - počet rour v nejnižší vrstvě

$a_n = 5$ - počet rour v nejvyšší vrstvě

$d = -1$ - v každé další vrstvě je o jednu rouru méně

$s_n = 95$ - počet rour, které potřebujeme složit

Vydeme ze vztahu pro s_n : $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow$ dvě neznámé \Rightarrow potřebujeme další rovnici

vyjádříme si a_1 ze vztahu pro n -tý člen: $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_1 = a_n - (n-1)d$

Dosadíme: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[a_n - (n-1)d + a_n] = \frac{n}{2}[2a_n - (n-1)d]$

Výsledná rovnice bude určitě kvadratická \Rightarrow dosadíme konkrétní čísla:

$$95 = \frac{n}{2}[2 \cdot 5 - (n-1)(-1)] \quad / \cdot 2$$

$$190 = n[10 + (n-1)]$$

$$190 = n(9 + n)$$

$$n^2 + 9n - 190 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-190)}}{2 \cdot 1} = \frac{-9 \pm 29}{2}$$

$$n_1 = \frac{-9 + 29}{2} = 10$$

$$n_2 = \frac{-9 - 29}{2} = -19 \quad - \text{nedává smysl}$$

Dopočítám $a_1 = a_n - (n-1)d = 5 - (10-1)(-1) = 14$

Roury musíme složit do 10 vrstev, v nejnižší vrstvě bude 14 rour.

Př. 5: Buduje se hlediště letního kina přibližně pro 1200 diváků. Do první řady je plánována 40 sedadel, do každé následující o čtyři sedadla více. Kolik řad sedadel bude mít hlediště?

Napíšeme si, jaký význam mají jednotlivé zadané hodnoty z hlediska posloupností. Zbytek příkladu je pak pouhým dosazováním do vzorců.

$a_1 = 40$ - počet sedadel v první řadě

$a_n = ?$ - počet sedadel v poslední řadě

$d = 4$ - v každé další řadě je o 4 sedadla více

$s_n = 1200$ - přibližný počet sedadel ve všech řadách

Vyjdeme ze vztahu pro s_n : $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow$ dvě neznámé \Rightarrow potřebujeme další rovnici

tou je vztah pro n -tý člen: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Dosadíme: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

Výsledná rovnice bude určitě kvadratická \Rightarrow dosadíme konkrétní čísla:

$$1200 = \frac{n}{2}[2 \cdot 40 + (n-1)4]$$

$$1200 = \frac{n}{2}(80 + 4n - 4)$$

$$1200 = n(38 + 2n) \quad /: 2$$

$$600 = n^2 + 19n$$

$$n^2 + 19n - 600 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-600)}}{2 \cdot 1} = \frac{-19 \pm 52,5}{2}$$

$$n_1 = \frac{-19 + 52,5}{2} = 16,8$$

$$n_2 = \frac{-19 - 52,5}{2} = \dots \quad \text{- nedává smysl}$$

Řad musí být celé číslo \Rightarrow kino musí mít 17 řad sedadel.

Př. 6: Dělník obsluhuje 16 poloautomatických tkalcovských stavů. Výkon každého stroje je x metrů látky za jednu hodinu. První stav uvede dělník do chodu na začátku směny, každý další uvádí do činnosti vždy po dvou minutách. Kolik metrů látky vyrobí dělník na každém stavu v první hodině směny? Kolik metrů látky vyrobí celkem?

Podobný příklad jako předchozí, ale ve výsledcích se bude vyskytovat písmenko x .

Množství látky vyrobené stavem získáme, když vynásobíme dobu, po kterou byl stav zapnutý

\Rightarrow budu počítat pouze časy a pak je vynásobím x

doba činnosti prvního stavu v hodinách ... 1

doba činnosti druhého stavu v hodinách ... $1 - \frac{2}{60} = 1 - \frac{1}{30}$ (zapnutý po 2 minutách)

doba činnosti třetího stavu v hodinách ... $1 - \frac{4}{60} = 1 - \frac{2}{30}$ (zapnutý po 4 minutách)

\Rightarrow

$$a_1 = 1$$

$$d = \frac{1}{30}$$

$$n = 16$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (16-1)\frac{1}{30} = 1 - \frac{15}{30} = 0,5$$

doba, kterou pracovaly všechny stroj dohromady ... s_n

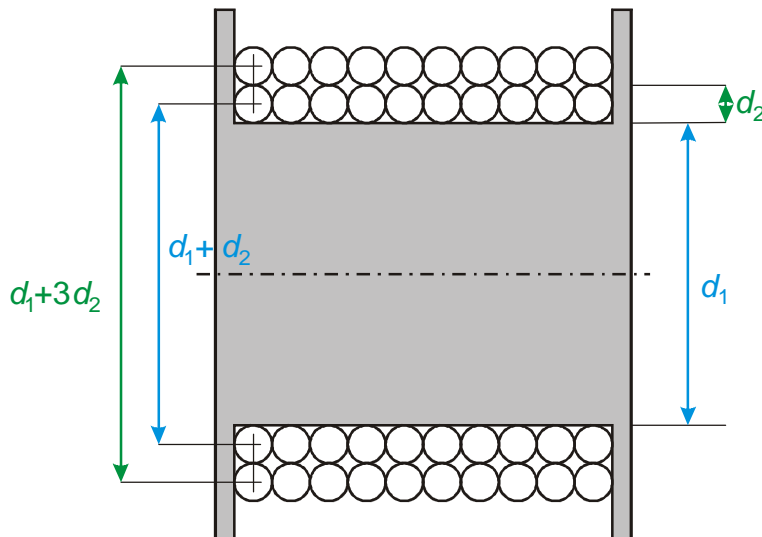
$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{16}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 8\frac{3}{2} = 12$$

Jednotlivé stavy vyrobily $x, \left(1 - \frac{1}{30}\right)x, \dots, \left(1 - \frac{15}{30}\right)x$ metrů látky

Všechny stroje dohromady vyrobily $12x$ metrů látky

Př. 7: Na buben o průměru d_1 je navíjeno lano s průměrem d_2 . V každé vrstvě je lano navinuto vedle sebe m krát. Urči, jaká je přibližná délka lana navinutého na buben v n vrstvách. Příklad řeš obecně i konkrétně pro hodnoty $d_1 = 1,2$ m, $d_2 = 0,04$ m, $m = 30$, $n = 6$.

Nakreslíme obrázek:



Délka jednoho závitu v první vrstvě: $o = \pi d = \pi(d_1 + d_2)$ (jako poloměre kružnice bereme vzdálenost středů příčných průřezů lana, vyznačenou modře nalevo)

Délka všech závitů v první vrstvě: $m\pi(d_1 + d_2)$ (m závitů)

Průměr závitu druhé vrstvy je vlevo vyznačen zeleně (jde opět o vzdálenost středů příčných průřezů lana ve druhé vrstvě) $d = d_1 + 3d_2$

Délka jednoho závitu v druhé vrstvě: $o = \pi d = \pi(d_1 + 3d_2)$

Délka všech závitů v druhé vrstvě: $m\pi(d_1 + 3d_2)$ (m závitů)

Délka druhé vrstvy je větší, protože je namotána na první. Stejně tak délka třetí vrstvy bude delší než délka druhé a stejnou vzdálenost \Rightarrow délky jednotlivých vrstev tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí $m\pi 2d_2$

Délka n -té vrstvy:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = m\pi(d_1 + d_2) + (n-1)m\pi 2d_2 = m\pi[d_1 + d_2 + n2d_2 - 2d_2] =$$

$$a_n = m\pi[d_1 + (2n-1)d_2]$$

Celková délka lana je rovna součtu délek lana v jednotlivých vrstvách \Rightarrow sečteme prvních n členů řady, kterou jsme právě zkoumali:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2} [m\pi(d_1 + d_2) + m\pi[d_1 + (2n-1)d_2]] = \frac{nm\pi}{2} [d_1 + d_2 + d_1 + (2n-1)d_2]$$

$$s_n = \frac{nm\pi}{2} [2d_1 + 2nd_2] = nm\pi(d_1 + nd_2)$$

Celková délka lana v n vrstvách je $nm\pi(d_1 + nd_2)$.

Shrnutí: Některé slovní úlohy je možné matematizovat pomocí posloupností. Stačí přiřadit čísla ze zadání jejím ekvivalentům v posloupnostech.