8.2.3 Úlohy s aritmetickou posloupností

Předpoklady: 8201, 8203

Souhrn vzorců a pravidel pro aritmetickou posloupnost:

$a_{n+1} = a_n + d$ - poznávací znamení

$a_n = a_1 + (n-1)d$ - vzorec pro n-tý člen

$a_s = a_r + (s-r)d$ - vztah mezi a_s a a_r

$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ - součet prvních n členů

Př. 1: Urči reálné číslo x tak, aby čísla $a_1 = x^2 - 5$; $a_2 = x + 5$; $a_3 = x^2 + x$ tvořila tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

Pokud mají čísla $a_1; a_2; a_3$ tvořit tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, musí se rozdíly $a_2 - a_1$ a $a_3 - a_2$ rovnat diferenci d a tedy i sobě navzájem.

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

$$(x+5) - (x^2 - 5) = (x^2 + x) - (x+5)$$

$$x + 5 - x^2 + 5 = x^2 + x - x - 5$$

$$2x^2 - x - 15 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-15)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 11}{4}$$

$$x_1 = \frac{1+11}{4} = 3$$

$$x_2 = \frac{1-11}{4} = -\frac{5}{2}$$

Podmínky zadání splňují dvě reálná čísla 3 a –2,5.

Pedagogická poznámka: Pokud studenti nedokáží příklad řešit samostatně ještě před napsáním rovnice $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ se je snažím popostrčit například tím, že na tabuli napíšeme posloupnosti $1;3;5;...$ a $1;3;8;...$ a diskutujeme o tom, jak se pozná že první z nich je aritmetická a druhá ne.

Př. 2: Urči a_1 a d aritmetické posloupnosti, pro kterou platí $a_5 + a_2 = 22$; $a_7 - a_3 = -16$.

Máme zdánlivě neřešitelný problém: čtyři neznámé, ale pouze dvě rovnice.
Řešení: všechny členy aritmetické posloupnosti můžeme vyjádřit pomocí a_1 a d $\Rightarrow$ provedeme toto nahrazení a dostane soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$a_7 = a_1 + 6d$
Dosadíme do rovnic:
$a_5 + a_2 = 22 \;\Rightarrow\; a_1 + 4d + a_1 + d = 22$
$a_7 - a_3 = -16 \;\Rightarrow\; a_1 + 6d - (a_1 + 2d) = -16$
Upravíme rovnice:
$2a_1 + 5d = 22$
$5d = -16 \;\Rightarrow\; d = -4$
Dosazením do první rovnice určíme a_1: $2a_1 + 5d = 2a_1 + 5(-4) = 22$
$2a_1 = 42$
$a_1 = 21$
Pro hledanou posloupnost platí: $a_1 = 21$, $d = -4$.

Př. 3: Pro aritmetickou posloupnost platí: $a_2 + a_3 + a_4 = 15$, $a_3 \cdot a_4 = 40$. Urči a_1, d a a_8.

Máme zdánlivě neřešitelný problém: tři neznáme, ale pouze dvě rovnice.
Řešení: všechny členy aritmetické posloupnosti můžeme vyjádřit pomocí a_1 a d $\Rightarrow$ provedeme toto nahrazení a dostane soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:
$a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_4 = a_1 + 3d$

Dosadíme:
$$\begin{aligned} a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d &= 15 \\ (a_1 + 2d)\cdot(a_1 + 3d) &= 40 \end{aligned}$$

$3a_1 + 6d = 15 \quad /:3$
$a_1^2 + 3a_1d + 2a_1d + 6d^2 = 40$

$a_1 + 2d = 5 \;\Rightarrow\; a_1 = 5 - 2d$
$a_1^2 + 5a_1d + 6d^2 = 40$

Dosadíme do druhé rovnice: $(5-2d)^2 + 5(5-2d)d + 6d^2 = 40$
$25 - 20d + 4d^2 + 25d - 10d^2 + 6d^2 = 40$
$5d = 15$
$d = 3$
$a_1 = 5 - 2d = 5 - 2\cdot 3 = -1$
Vypočteme a_8: $a_8 = a_1 + (8-1)d = -1 + (8-1)3 = 20$

Pedagogická poznámka: Studenti, kteří vyřeší příklad 2, řeší příklad 3 bez problémů, takže při nedostatku času je možné jej přeskočit.

Př. 4: Urči a_1 a d aritmetické posloupnosti, pro kterou platí $s_5 = s_6 = 60$.

Z rovnosti $s_5 = s_6 = 60$ vyplývá, že $a_6 = 0$. (protože $s_6 = s_5 + a_6$)
Dosadíme do vzorce pro součet prvních *n* členů řady $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.
$s_6 = \frac{6}{2}(a_1 + a_6)$

$60 = \frac{6}{2}(a_1 + 0)$

$120 = 6a_1$

$a_1 = 20$

Spočítáme diferenci ze vztahu pro *n*-tý člen: $a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_6 = a_1 + (6-1)d$

$0 = 20 + 5d$

$d = -4$

Hledaná aritmetická posloupnost má první člen 20 a diferenci –4.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti hned po přečtení zadání začnou tvrdit, že $s_5 = s_6 = 60$ nemůže nikdy platit. Ujistím je, že to samozřejmě platit může a právě odhalení okolností, za kterých rovnost platí, je pro vyřešení příkladu zcela zásadní.

Př. 5: V aritmetické posloupnosti známe člen $a_4 = 6$. Urči podmínku pro diferenci posloupnosti, aby platilo $s_{12} \geq 210$.

Napíšeme si vzorec pro s_{12}: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_{12}) \Rightarrow s_{12} = \frac{12}{2}(a_1 + a_{12})$

V posloupnosti známe pouze člen a_4 $\Rightarrow$ členy a_1 a a_{12} musíme vyjádřit pomocí členu a_4 (používáme vzorec $a_s = a_r + (s-r)d$:

$a_1 = a_4 + (1-4)d = 6 - 3d$

$a_{12} = a_4 + (12-4)d = 6 + 8d$

Dosadíme: $s_{12} = 6(6 - 3d + 6 + 8d)$

$s_{12} = 6(12 + 5d)$

vypíšeme nerovnost: $6(12 + 5d) \geq 210$

$12 + 5d \geq 35$

$5d \geq 23$

$d \geq \frac{23}{5}$

Diference posloupnosti musí být větší nebo rovna $\frac{23}{5}$.

Pedagogická poznámka: Když studenti nebudou vědět, jak si poradit s vnitřkem závorky, poraďte jim, že stejně jako je možné určit všechny členy posloupnosti pomocí a_1 a d, je možné je určit pomocí libovolného jiného členu a_n a d.

Př. 6: Vyřeš rovnici: $3 + 7 + 11 + 15 + ... + x = 5050$.

Na levé straně je součet aritmetické řady: $a_1 = 3$; $d = 4$; $a_n = x$. Pravá strana se rovná součtu prvních *n* členů této řady: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = 5050$

Musíme dopočítat hodnotu n pomocí členu $a_n = x$: $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\frac{a_n - a_1}{d} = n - 1$$

$$n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}$$

Dosadíme do vztahu pro součet: $\frac{a_n - a_1 + d}{2d}(a_1 + a_n) = 5050$

Dosadíme hodnoty: $\frac{x - 3 + 4}{2 \cdot 4}(3 + x) = 5050 \quad / \cdot 8$

$$(x+1)(3+x) = 5050 \cdot 8$$

$$x^2 + 3x + x + 3 = 40400$$

$$x^2 + 4x - 40397 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40397)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 402}{2}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 402}{2} = 199$$

$$x_2 = \frac{-4 - 402}{2} = -203$$

Řešením rovnice je číslo 199.

Př. 7: Petáková:
strana 68/cvičení 19 c) f) g)
strana 68/cvičení 22 a)
strana 69/cvičení 35
strana 69/cvičení 41
strana 69/cvičení 43
strana 70/cvičení 51 c) f)
strana 70/cvičení 52 b)

Shrnutí: Všechny členy aritmetické posloupnosti je možné vyjádřit pomocí diference a jednoho dalšího členu (nejčastěji a_1).