

8.2.3 Úlohy s aritmetickou posloupností

Předpoklady: 8201, 8203

Souhrn vzorců a pravidel pro aritmetickou posloupnost:

$$a_{n+1} = a_n + d \quad - \text{poznávací znamení}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad - \text{vzorec pro } n\text{-tý člen}$$

$$a_s = a_r + (s-r)d \quad - \text{vztah mezi } a_s \text{ a } a_r$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad - \text{součet prvních } n \text{ členů}$$

Př. 1: Urči reálné číslo x tak, aby čísla $a_1 = x^2 - 5$; $a_2 = x + 5$; $a_3 = x^2 + x$ tvořila tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti.

Pokud mají čísla $a_1; a_2; a_3$ tvořit tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, musí se rozdíly $a_2 - a_1$ a $a_3 - a_2$ rovnat diferenci d a tedy i sobě navzájem.

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

$$(x+5) - (x^2-5) = (x^2+x) - (x+5)$$

$$x+5-x^2+5 = x^2+x-x-5$$

$$2x^2 - x - 15 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-15)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 11}{4}$$

$$x_1 = \frac{1+11}{4} = 3$$

$$x_2 = \frac{1-11}{4} = -\frac{5}{2}$$

Podmínky zadání splňují dvě reálná čísla 3 a $-2,5$.

Pedagogická poznámka: Pokud studenti nedokáží příklad řešit samostatně ještě před napsáním rovnice $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ se je snažím popostrčit například tím, že na tabuli napíšeme posloupnosti 1;3;5;... a 1;3;8;... a diskutujeme o tom, jak se pozná že první z nich je aritmetická a druhá ne.

Př. 2: Urči a_1 a d aritmetické posloupnosti, pro kterou platí $a_5 + a_2 = 22$; $a_7 - a_3 = -16$.

Máme zdánlivě neřešitelný problém: čtyři neznámé, ale pouze dvě rovnice.

Řešení: všechny členy aritmetické posloupnosti můžeme vyjádřit pomocí a_1 a $d \Rightarrow$ provedeme toto nahrazení a dostane soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$a_7 = a_1 + 6d$$

Dosadíme do rovnic:

$$a_5 + a_2 = 22 \Rightarrow a_1 + 4d + a_1 + d = 22$$

$$a_7 - a_3 = -16 \Rightarrow a_1 + 6d - (a_1 + 2d) = -16$$

Upravíme rovnice:

$$2a_1 + 5d = 22$$

$$5d = -16 \Rightarrow d = -4$$

Dosazením do první rovnice určíme a_1 : $2a_1 + 5d = 2a_1 + 5(-4) = 22$

$$2a_1 = 42$$

$$a_1 = 21$$

Pro hledanou posloupnost platí: $a_1 = 21$, $d = -4$.

Př. 3: Pro aritmetickou posloupnost platí: $a_2 + a_3 + a_4 = 15$, $a_3 \cdot a_4 = 40$. Urči a_1 , d a a_8 .

Máme zdánlivě neřešitelný problém: tři neznáme, ale pouze dvě rovnice.

Řešení: všechny členy aritmetické posloupnosti můžeme vyjádřit pomocí a_1 a $d \Rightarrow$ provedeme toto nahrazení a dostane soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_1 + 2d, \quad a_4 = a_1 + 3d$$

$$\text{Dosadíme: } \begin{array}{l} a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d = 15 \\ (a_1 + 2d) \cdot (a_1 + 3d) = 40 \end{array}$$

$$\hline 3a_1 + 6d = 15 \quad /:3$$

$$a_1^2 + 3a_1d + 2a_1d + 6d^2 = 40$$

$$\hline a_1 + 2d = 5 \Rightarrow a_1 = 5 - 2d$$

$$\hline a_1^2 + 5a_1d + 6d^2 = 40$$

Dosadíme do druhé rovnice: $(5 - 2d)^2 + 5(5 - 2d)d + 6d^2 = 40$

$$25 - 20d + 4d^2 + 25d - 10d^2 + 6d^2 = 40$$

$$5d = 15$$

$$d = 3$$

$$a_1 = 5 - 2d = 5 - 2 \cdot 3 = -1$$

Vypočteme a_8 : $a_8 = a_1 + (8-1)d = -1 + (8-1)3 = 20$

Pedagogická poznámka: Studenti, kteří vyřeší příklad 2, řeší příklad 3 bez problémů, takže při nedostatku času je možné jej přeskočit.

Př. 4: Urči a_1 a d aritmetické posloupnosti, pro kterou platí $s_5 = s_6 = 60$.

Z rovnosti $s_5 = s_6 = 60$ vyplývá, že $a_6 = 0$. (protože $s_6 = s_5 + a_6$)

Dosadíme do vzorce pro součet prvních n členů řady $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

$$s_6 = \frac{6}{2}(a_1 + a_6)$$

$$60 = \frac{6}{2}(a_1 + 0)$$

$$120 = 6a_1$$

$$a_1 = 20$$

Spočítáme diferenci ze vztahu pro n -tý člen: $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$a_6 = a_1 + (6-1)d$$

$$0 = 20 + 5d$$

$$d = -4$$

Hledaná aritmetická posloupnost má první člen 20 a diferenci -4 .

Pedagogická poznámka: Někteří studenti hned po přečtení zadání začnou tvrdit, že $s_5 = s_6 = 60$ nemůže nikdy platit. Ujistím je, že to samozřejmě platit může a právě odhalení okolností, za kterých rovnost platí, je pro vyřešení příkladu zcela zásadní.

Př. 5: V aritmetické posloupnosti známe člen $a_4 = 6$. Urči podmínku pro diferenci posloupnosti, aby platilo $s_{12} \geq 210$.

$$\text{Napíšeme si vzorec pro } s_{12}: s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_{12}) \Rightarrow s_{12} = \frac{12}{2}(a_1 + a_{12})$$

V posloupnosti známe pouze člen $a_4 \Rightarrow$ členy a_1 a a_{12} musíme vyjádřit pomocí členu a_4 (používáme vzorec $a_s = a_r + (s-r)d$):

$$a_1 = a_4 + (1-4)d = 6 - 3d$$

$$a_{12} = a_4 + (12-4)d = 6 + 8d$$

$$\text{Dosadíme: } s_{12} = 6(6 - 3d + 6 + 8d)$$

$$s_{12} = 6(12 + 5d)$$

$$\text{vypíšeme nerovnost: } 6(12 + 5d) \geq 210$$

$$12 + 5d \geq 35$$

$$5d \geq 23$$

$$d \geq \frac{23}{5}$$

Diference posloupnosti musí být větší nebo rovna $\frac{23}{5}$.

Pedagogická poznámka: Když studenti nebudou vědět, jak si poradit s vnitřkem závorky, poraďte jim, že stejně jako je možné určit všechny členy posloupnosti pomocí a_1 a d , je možné je určit pomocí libovolného jiného členu a_n a d .

Př. 6: Vyřeš rovnici: $3 + 7 + 11 + 15 + \dots + x = 5050$.

Na levé straně je součet aritmetické řady: $a_1 = 3$; $d = 4$; $a_n = x$. Pravá strana se rovná součtu

$$\text{prvních } n \text{ členů této řady: } s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = 5050$$

Musíme dopočítat hodnotu n pomocí členu $a_n = x$: $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\frac{a_n - a_1}{d} = n - 1$$

$$n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}$$

Dosadíme do vztahu pro součet: $\frac{a_n - a_1 + d}{2d} (a_1 + a_n) = 5050$

Dosadíme hodnoty: $\frac{x-3+4}{2 \cdot 4} (3+x) = 5050 \quad / \cdot 8$

$$(x+1)(3+x) = 5050 \cdot 8$$

$$x^2 + 3x + x + 3 = 40400$$

$$x^2 + 4x - 40397 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40397)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 402}{2}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 402}{2} = 199$$

$$x_2 = \frac{-4 - 402}{2} = -203$$

Řešením rovnice je číslo 199.

Př. 7: Petáková:

strana 68/cvičení 19 c) f) g)

strana 68/cvičení 22 a)

strana 69/cvičení 35

strana 69/cvičení 41

strana 69/cvičení 43

strana 70/cvičení 51 c) f)

strana 70/cvičení 52 b)

Shrnutí: Všechny členy aritmetické posloupnosti je možné vyjádřit pomocí diference a jednoho dalšího členu (nejčastěji a_1).