

## 8.1.8 Důkaz matematickou indukcí II

**Předpoklady:** 8102, 8103, 8107

**Př. 1:** Dokaž pomocí matematické indukce, že pro členy rekurentně zadané posloupnosti

$$a_1 = 1; a_{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 a_n; n \in N \text{ platí vzorec } a_n = \frac{1}{n^2}.$$

Postupujeme podle kroků:

**1. ověření pro  $n = 1$**

$$a_1 = \frac{1}{1^2} = 1 \quad \text{platí}$$

**2. předpokládám, že vzorec platí pro  $a_k$  a dokazuji ho pro  $a_{k+1}$**

předpokládám, že vím:  $a_k = \frac{1}{k^2}$

$$a_{k+1} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 a_k = \frac{k^2}{(k+1)^2} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(k+1)^2} \text{ vzorec pro } a_{k+1} \text{ platí}$$

$\Rightarrow$  vzorec platí pro všechna  $a_n$

**Př. 2:** Dokaž pomocí matematické indukce, že pro členy rekurentně zadané posloupnosti

$$a_1 = 1; a_{n+1} = \frac{n \cdot a_n + 2}{n+1}; n \in N \text{ platí vzorec } a_n = 2 - \frac{1}{n}.$$

Postupujeme podle kroků:

**1. ověření pro  $n = 1$**

$$a_1 = 2 - \frac{1}{1} = 2 - 1 = 1 \quad \text{platí}$$

**2. předpokládám, že vzorec platí pro  $a_k$  a dokazuji ho pro  $a_{k+1}$**

předpokládám, že vím:  $a_k = 2 - \frac{1}{k}$

zjistíme zda platí:  $a_{k+1} = 2 - \frac{1}{k+1} \Rightarrow$  použiju rekurentní zadání a spočtu pomocí  $a_k$  člen

$a_{k+1}$ :

$$a_{k+1} = \frac{k \cdot a_k + 2}{k+1} = \frac{k \cdot \left(2 - \frac{1}{k}\right) + 2}{k+1} = \frac{k \cdot \left(\frac{2k-1}{k}\right) + 2}{k+1} = \frac{2k-1+2}{k+1} = \frac{2k+2}{k+1} - \frac{1}{k+1} = 2 - \frac{1}{k+1}$$

vzorec pro  $a_{k+1}$  platí

$\Rightarrow$  vzorec platí pro všechna  $a_n$

Co znamená zápis  $1 + 2 + 3 + \dots + n$ ?

Zkusíme to nejdřív na příkladech:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

$$1+2+3+\dots+4=1+2+3+4$$

**Př. 3:** Napiš konkrétní součet řady  $1+2+3+\dots+n$ , pokud platí:

- a)  $n=10$
- b)  $n=3$
- c)  $n=1$

a)  $n=10$

$$1+2+3+\dots+n=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

b)  $n=3$

$$1+2+3+\dots+n=1+2+3$$

c)  $n=1$

$$1+2+3+\dots+n=1$$

**Př. 4:** Dokaž pomocí matematické indukce, že pro všechna přirozená čísla platí:

$$1+2+\dots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Postupujeme podle kroků:

**1. ověření pro  $n=1$**

součet na levé straně má jediný člen 1

dosazují do vzorce na pravé straně  $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1(1+1)}{2}=1$

$\Rightarrow$  pro  $n=1$  rovnost platí

**2. předpokládám, že rovnost platí pro  $k$  a dokazuji ji pro  $k+1$**

předpokládám, že vím platí pro  $k$ :  $1+2+\dots+(k-1)+k=\frac{k(k+1)}{2}$

chci dokázat pro  $k+1$ :  $1+2+\dots+(k-1)+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

nahradím prvních  $k$  členů součtu vlevo:

$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k^2+k+2(k+1)}{2}=\frac{k^2+2k+k+2}{2}$$

$$\frac{k^2+k+2k+2}{2}=\frac{k^2+2k+k+2}{2} \text{ obě strany se rovnají}$$

$\Rightarrow$  vzorec platí pro všechna  $n$

**Př. 5:** Je dáno  $n$  přímk v rovině, z nichž každé dvě jsou navzájem různoběžné a žádné tři neprocházejí týmž bodem. Tyto přímky rozdělují rovinu na  $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$  částí.

Dokaž platnost tohoto tvrzení.

Postupujeme podle kroků:

**1. ověření pro  $n=1$**

$\frac{1}{2}(n^2 + n + 2) = \frac{1}{2}(1^2 + 1 + 2) = 2$ , je to pravda, 1 přímka rozděluje rovinu na dvě části

$\Rightarrow$  pro  $n = 1$  rovnost platí

**2. předpokládám, že rovnost platí pro  $k$  a dokazuji ji pro  $k + 1$**

předpokládáme, že  $k$  přímek rozděluje rovinu na  $\frac{1}{2}(k^2 + k + 2)$ ,

chceme dokázat, že  $k + 1$  přímek rozděluje rovinu na  $\frac{1}{2}[(k + 1)^2 + (k + 1) + 2]$ , upravíme vztah,

který máme dokázat:  $\frac{1}{2}[(k + 1)^2 + (k + 1) + 2] = \frac{1}{2}[k^2 + 2k + 1 + k + 1 + 2] = \frac{1}{2}[k^2 + 3k + 4]$

Teď odvodíme platnost vztahu pro  $k + 1$  přímek.

Mám  $k$  přímek, které rozdělují rovinu na  $\frac{1}{2}(k^2 + k + 2)$  částí. Přímka  $k + 1$  protne všech

$k$  stávajících přímek  $\Rightarrow$  rozdělí  $k + 1$  dosavadních částí roviny na dvě  $\Rightarrow$  přibude  $k + 1$  částí

$\Rightarrow$  počet částí roviny při  $k + 1$  přímkách:

$$\frac{1}{2}(k^2 + k + 2) + (k + 1) = \frac{1}{2}(k^2 + k + 2 + 2k + 2) = \frac{1}{2}(k^2 + 3k + 4)$$

Dokázáno

**Př. 6:** Petáková:

strana 150/cvičení 103 b) d) f)

strana 150/cvičení 109

**Shrnutí:**