8.1.7 Důkaz matematickou indukcí I

Předpoklady: 8102, 8103

Pedagogická poznámka: Nebudu zastírat, že způsobem, kterým je důkaz matematickou indukcí zpracován teď, jsem ho nikdy neučil. Měl jsem původně připravenou látku na jedinou hodinu, ale bohužel se ukázalo, že většina studentů není schopná vstřebat všechno, co se během této hodiny probíralo. Rozdělil jsem proto příklady do dvou hodin a nageneroval k nim další analogické.
V první hodině je vlastní vysvětlení důkazu a příklady, u kterých nečiní studentů potíže jednak pochopení dokazovaného problému a jednak dosazení pro $n=1$ (které je například u důkazu vzorce pro součet aritmetické řady pro většinu nepochopitelné). Příklady na vzorec pro *n*-tý vzorec a dělitelnost střídám schválně, protože jednak se střídá směr pohledu na metodu a jednak to snad trochu brání zmenchaničtění metody.

Př. 1: Je dána rekurentní posloupnost $a_1=3; a_{n+1}=a_n+2; n\in N$. Napiš prvních pět členů posloupnosti a odhadni vzorec pro *n*-tý člen.

členy posloupnosti: $3;5;7;9;11;...$

Jde o lichá čísla, začínající 3 $\Rightarrow$ odhad vzorce $(2n+1)_{n=1}^{\infty}$

Pokud dosadíme za $n\in\{1;2;3;4;5\}$ získáme prvních pět členů posloupnosti výše $\Rightarrow$ vzorec $(2n+1)_{n=1}^{\infty}$ je správný

Bohužel tak jednoduché to není, nemůžeme s jistotou tvrdit, že vzorec $a_n=2n+1$ platí pro všechna přirozená čísla *n*, vždyť jsme ho zkusili pouze na prvních pět čísel. Zatím jde pouze o hypotézu (podloženou pěti výpočty). Jak dál?

Vyzkoušet všechna přirozená čísla nejde (je jich nekonečně mnoho) $\Rightarrow$ musíme uvažovat jinak.
Zkusíme si náhodně jak vypadá situace pro větší čísla:
Kolik by mělo být a_{100}? $a_{100}=2n+1=2\cdot100+1=201$.
Předpokládám, že a_{100} je správně. Bude vzorec správně také pro a_{101}?
Když znám a_{100} můžu to ověřit dosazením do rekurentního vzorce:
$a_n=a_{101}=a_{100}+2=201+2=203=202+1=2(101)+1=2n+1$
Pokud platí vzorec pro a_{100}, platí vzorec i pro a_{101}.

Nešlo by to obecně pro a_k a a_{k+1}?
Předpokládám, že platí: $a_k=2k+1$, chci dokázat, že platí: $a_{k+1}=2(k+1)+1$.
Zkusím to z rekurentního vztahu:
$a_{k+1}=a_k+2=2k+1+2=2k+2+1=2(k+1)+1$ $\Rightarrow$ přesně vzorec, který jsme chtěli.

Tím jsme dokázali, že vzorec opravdu platí pro všechna přirozená čísla.

Jak to?
Zopakujeme si co víme:
1. Vzorec platí pro $a_1; a_2; a_3; a_4 a_5$
2. Pokud platí vzorec pro libovolný člen a_k, platí i pro následující člen a_{k+1}.
$\Rightarrow$
platí-li vzorec pro a_5 (už víme, že platí z bodu 1), platí i pro a_6
platí-li vzorec pro a_6 (už víme, z předchozí řádky), platí i pro a_7
platí-li vzorec pro a_7 (už víme, z předchozí řádky), platí i pro a_8
a tak by šlo pokračovat pořád dál až do nekonečna

Můžeme argumentovat i obráceně. Co kdyby vzorec pro nějaké členy neplatil? Vezmu první takový člen a označím ho a_{m+1}. Pro předchozí člen a_m, ale vzorec platí (aby a_{m+1} byl prvním členem pro který vzorec neplatí) $\Rightarrow$ podle bodu 2 platí vzorec i pro a_{m+1} (spor s tím, že pro něj neplatí).

Přirovnání: Do třídy přichází nový student a pan ředitel říká, že bude nejmenší ve třídě. Jak to ověřit? Aby se nemusel se všemi přeměřovat, postavím třídu do řady podle velikosti. Pokud bude kdokoliv v řadě větší než nováček bude větší než nováček i ten, který je napravo (jako větší) od něj (analogie bodu 2). Stačí přeměřit nováčka s prvním studentem v řadě (tím nejmenším), (analogie bodu 1) pokud je tento větší než nováček je nováček opravdu nejmenší.

Právě jsme si ukázali nový typ matematického důkazu, **důkaz matematickou indukcí**.
Tímto důkazem se dokazují věty typu: „Pro všechna přirozená čísla platí $V(n)$“.

Důkaz matematickou indukcí se skládá ze dvou kroků:
1. Dokážeme, že platí $V(n)$ pro $n=1$ (ověření vzorce pro a_1, přeměření nejmenšího původního studenta s nováčkem)
2. Pro každé přirozené číslo *k* dokážeme: Jestliže platí $V(k)$, pak platí i $V(k+1)$.
(ověření vzorce pro a_{k+1} za předpokladu, že platí pro a_k, seřazení třídy podle velikosti).

Bod 2 si můžeme představit jako vytvoření řetězu a bod jedna jako přidělání počátku řetězu ke kůlu. Každý článek řetězu je nyní pevně přidělán ke kůlu, protože články drží pohromadě (bod 2) a první je přidělán ke kůlu (bod 1).

Př. 2: Dokaž pomocí matematické indukce, že pro všechna členy posloupnosti $a_1 = \frac{1}{2}; a_{n+1} = 2a_n; n \in N$ platí vzorec pro *n*-tý člen $\left(2^{n-2}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Postupujeme podle kroků:
1. ověření pro $n=1$
$a_n = 2^{n-2} \Rightarrow a_1 = 2^{1-2} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ platí (a_1 je $\frac{1}{2}$)
2. předpokládám, že vzorec platí pro *k* a dokazuji ho pro $k+1$
předpokládám, že vím: $a_k = 2^{k-2}$

zjišťujeme zda platí: $a_{k+1} = 2^{(k+1)-2} = 2^{k-1}$ $\Rightarrow$ použiju rekurentní zadání a spočtu pomocí a_k člen a_{k+1}: $a_{k+1} = 2a_k = 2 \cdot 2^{k-2} = 2^{k-1}$, dosadil jsem vzorec $a_k = 2^{k-2}$ a získal jsem vztah pro a_{k+1} $\Rightarrow$ věta platí pro všechna n

Př. 3: Dokaž pomocí matematické indukce, že pro všechna přirozená čísla platí: $3/n^3 + 2n$. (3 dělí číslo $n^3 + 2n$).

Postupujeme podle kroků:

1. ověření pro $n = 1$

$n^3 + 2n = 1^3 + 2 \cdot 1 = 3$ je dělitelné 3 $\Rightarrow$ platí

2. předpokládáme, že vzorec platí pro *k* a dokazuji ho pro $k+1$

předpokládáme, že víme: $3/k^3 + 2k$

zjišťujeme zda platí: $3/(k+1)^3 + 2(k+1)$ $\Rightarrow$ upravujeme výraz tak, abychom využili $3/k^3 + 2k$:

$(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 = k^3 + 2k + 3k^2 + 3k + 3 = k^3 + 2k + 3(k^2 + k + 1)$

červená část výrazu je dělitelná kvůli předpokladu $3/k^3 + 2k$

$\Rightarrow$ věta platí pro všechna n

Př. 4: Dokaž pomocí matematické indukce, že pro všechna členy posloupnosti $a_1 = 0; a_{n+1} = 2 - a_n; n \in N$ platí vzorec pro *n*-tý člen $\left(1 + [-1]^n\right)_{n=1}^{\infty}$.

Postupujeme podle kroků:

1. ověření pro $n = 1$

$a_n = 1 + [-1]^n \Rightarrow a_1 = 1 + (-1)^1 = 0$ $\Rightarrow$ platí (a_1 je 0)

2. předpokládám, že vzorec platí pro *k* a dokazuji ho pro $k+1$

předpokládám, že vím: $a_k = 1 + (-1)^k$

zjišťujeme zda platí: $a_{k+1} = 1 + (-1)^{k+1}$ $\Rightarrow$ použiju rekurentní zadání a spočtu pomocí a_k člen a_{k+1}: $a_{k+1} = 2 - a_k = 2 - \left(1 + [-1]^k\right) = 2 - 1 - (-1)^k = 1 + (-1)(-1)^k = 1 + (-1)^{k+1}$, dosadil jsem vzorec $a_k = 1 + (-1)^k$ a získal jsem vztah pro a_{k+1} $\Rightarrow$ věta platí pro všechna n

Př. 5: Dokaž pomocí matematické indukce, že pro všechna přirozená čísla platí: $2/n^2 + n$. (2 dělí číslo $n^2 + n$).

Postupujeme podle kroků:

1. ověření pro $n = 1$

$n^2 + n = 1^2 + 1 = 2$ je dělitelné 2 $\Rightarrow$ platí

2. předpokládáme, že vzorec platí pro *k* a dokazuji ho pro $k+1$

předpokládáme, že víme: $2/k^2 + k$

zjišťujeme zda platí: $2/(k+1)^2 + (k+1)$ $\Rightarrow$ upravujeme výraz tak, abychom využili $2/k^2 + k$:

$(k+1)^2+(k+1)=k^2+2k+1+k+1=k^2+k+2k+2=k^2+k+2(k+1)$

červená část výrazu je dělitelná kvůli předpokladu $2/k^2+k$

$\Rightarrow$ věta platí pro všechna *n*

Př. 6: Dokaž pomocí matematické indukce, že pro všechna přirozená čísla platí: $5/2^{4n+3}-3$. (5 dělí číslo $2^{4n+3}-3$).

Postupujeme podle kroků:

1. ověření pro $n=1$

$2^{4n+3}-3=2^{4\cdot 1+3}-3=2^7-3=128-3=125$ je dělitelné 5 $\Rightarrow$ platí

2. předpokládáme, že vzorec platí pro *k* a dokazuji ho pro $k+1$

předpokládáme, že víme: $5/2^{4k+3}-3$

zjišťujeme zda platí: $5/2^{4(k+1)+3}-3$ $\Rightarrow$ upravujeme výraz tak, abychom využili $5/2^{4k+3}-3$:

$2^{4(k+1)+3}-3=2^{4k+7}\underbrace{-2^{4k+3}+2^{4k+3}}_{0}-3=2^{4k+3}\left(2^4-1\right)+2^{4k+3}-3=2^{4k+3}\cdot 15+2^{4k+3}-3$

červená část výrazu je dělitelná kvůli předpokladu $5/2^{4k+3}-3$

$\Rightarrow$ věta platí pro všechna *n*

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad se o hodině asi nepodaří stihnout. Zařazen je hlavně kvůli použití triku s přičtením nuly.

Př. 7: Petáková:
strana 150/cvičení 101 a)
strana 150/cvičení 102 a)

Shrnutí: