8.1.5 Vlastnosti posloupností

Předpoklady: 2110, 2111, 8102

Opakování z funkcí:

Funkce $f(x)$ se nazývá rostoucí, právě když pro všechna $x_1; x_2$ z definičního oboru platí: je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce $f(x)$ se nazývá klesající, právě když pro všechna $x_1; x_2$ z definičního oboru platí: je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) > f(x_2)$.

Př. 1: Z užitím definic rostoucí a klesající funkce zformuluj definici rostoucí a klesající posloupnosti. Využij symboliku používanou u posloupností.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá rostoucí, právě když pro všechna $r, s \in N$ platí: Je-li $r < s$ pak $a_r < a_s$.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá klesající, právě když pro všechna $r, s \in N$ platí: Je-li $r < s$ pak $a_r > a_s$.

Pedagogická poznámka: První pokus o vyřešení prvního příkladu dopadne katastrofou. Studenti totiž do této chvíli nijak nepotřebovali vnímat, jaké rozdíly mezi značením funkcí a posloupností vlastně jsou a tak nemají šanci příklad vyřešit, protože si sami nerozmysleli, co je čím nahrazeno.
Řeším to tak, že nejprve všem vynadám a pak jim ukážu a vysvětlím následující tabulku a poté, co oni bez větších problémů příklad vyřeší, si ještě rejpnu, jak je všechno jednodušší, když člověk alespoň trochu ví, co dělá.

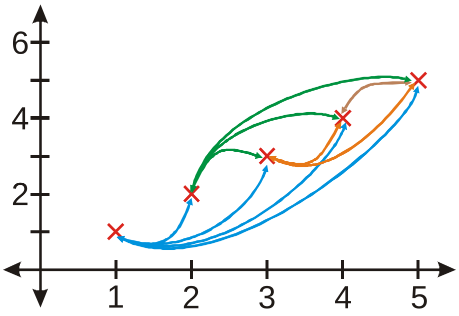
Porovnání značení u funkci a posloupností:

V obou případech jde o předpisy, které z něčeho vyrábějí čísla

vycházím z libovolné podmnožiny *R*	vycházím ze speciální podmnožiny *N*
$x \to y=f(x)$	$n \to a_n$
říkáme „z čísla *x* jsme získali hodnotu *y* (nebo $f(x)$)	z čísla *n* vznikl *n*-tý člen posloupnosti (a_n)

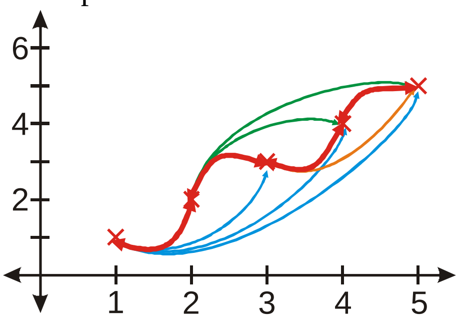
Obě definice nejsou ničím víc než přepsání definic používaných pro funkce. Mají značné nevýhody. Například pokud budu chtít dokázat, že je nějaká posloupnost rostoucí musím, ověřit nerovnost pro každou dvojici, tedy každý člen musím porovnat se všemi ostatními.

Př. 2: Nakresli graf posloupnosti $1;2;3;4;5$. Vyznač do grafu všechny dvojice, které musím porovnat, aby dokázal, že tato posloupnost je rostoucí



U posloupnosti, která má pět členů bych měl porovnávat 10x.

Měli bychom využít faktu, že posloupnosti mají hodnoty uspořádané a dokazování rostoucí funkce zjednodušit.
Kolik porovnání nám bude stačit?



Stačí pouze červená tučná porovnání, když vím že platí $a_2 > a_1$ a $a_3 > a_2$ nemusím porovnávat a_3 a a_1 a vím, že bude platit $a_3 > a_1$.
$\Rightarrow$ posloupnost bude rostoucí, pokud bude každý člen větší než člen předchozí.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, právě když pro všechna $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.

Věta je jasná, přesto ji musíme dokázat.
Důkaz věta má tvar ekvivalence:
posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí $\Leftrightarrow$ pro všechna $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$.
$\Rightarrow$ musím dokázat „šipku“ oběma směry
1. dokazuji: $\Rightarrow$
vím: pro všechna $r, s \in N$ platí: Je-li $r < s$ pak $a_r < a_s$ (funkce je rostoucí)
chci: pro všechna $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$
Jednoduché: zvolím $r = n$, $s = n+1$ a dosadím:
$a_r < a_s \Rightarrow a_n < a_{n+1}$
2. dokazuji: $\Leftarrow$
vím: pro všechna $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1}$
chci: pro všechna $r, s \in N$ platí: Je-li $r < s$ pak $a_r < a_s$ (funkce je rostoucí)
Zvolím r a s libovolně tak, aby platilo $r < s$.
Vím, že platí pro všechna $n \in N$ platí $a_n < a_{n+1} \Rightarrow a_r > a_{r+1}$, ale i $a_{r+1} < a_{r+2}$ … a tak dále až dojdu nerovnosti $a_{r+k} < a_s$ a tedy i $a_r < a_s$.

Pedagogická poznámka: Je dobré, aby studenti pochopili, že v druhé části důkazu vlastně pomocí podmínky $a_n < a_{n+1}$ vytvoříme řetěz od a_r k a_s.

Př. 3: Zformuluj analogickou větu pro klesající posloupnosti.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesající, právě když pro všechna $n \in N$ platí $a_n > a_{n+1}$.

Př. 4: Rozhodni, které z následujících posloupností jsou rostoucí nebo klesající:

a) $\left([-2]^n\right)_{n=1}^{\infty}$

b) $(3n-1)_{n=1}^{\infty}$

c) $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Ve všech případech nejdříve napíšeme několik členů posloupnosti a odhadneme zda posloupnost může být rostoucí nebo klesající. Pokud bude mít posloupnost jednu z těchto vlastností pokusíme se vlastnost dokázat:

a) $\left([-2]^n\right)_{n=1}^{\infty}$

členy posloupnosti: $-2; 4; -8; 16; -32; 64; ...$ $\Rightarrow$ určitě není ani rostoucí ani klesající

b) $(3n-1)_{n=1}^{\infty}$

členy posloupnosti: $2; 5; 8; 11; 14; 17; ...$ $\Rightarrow$ zdá se, že jde o rostoucí posloupnost $\Rightarrow$ musím dokázat $a_n < a_{n+1}$ pro všechna $n \in N$, $a_n = 3n-1$, $a_{n+1} = 3(n+1)-1 = 3n+2$

dosadím do nerovnosti: $3n-1 < 3n+2$

$-1 < 2$ platí pro všechna n

c) $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

členy posloupnosti: $\frac{2}{1}; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \frac{6}{5}; \frac{7}{6}; ...$ $\Rightarrow$ zdá se, že jde o klesající posloupnost $\Rightarrow$ musím dokázat $a_n > a_{n+1}$ pro všechna $n \in N$, $a_n = \frac{n+1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$

dosadím do nerovnosti: $\frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1} \quad / \cdot n(n+1)$, pro $n \in N$ jde o kladná čísla, nerovnost se nemění

$(n+1)^2 > n(n+2)$

$n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n$

$n > 1$

Pedagogická poznámka: Bod b) počítám na tabuli, bod c) už dělají pouze studenti v lavicích.

Př. 5: Rozhodni, zda je posloupnost $a_1 = 4; a_{n+1} = a_n - 2; n \in N$ rostoucí nebo klesající.

Nemá cenu ani psát členy posloupnosti, posloupnost je klesající, což je vidět i po dosazení do nerovnosti: $a_{n+1} < a_n$

$a_{n+1} = a_n - 2 < a_n$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je samozřejmě strašně jednoduchý. Jde jenom o to, jestli studenti dokáží změnit přístup a nebudou se snažit dosazovat do vzorce, který ve skutečnosti neznají.

Př. 6: Rozhodni, zda je posloupnost $\left([1-n]^2\right)_{n=1}^{\infty}$ rostoucí nebo klesající.

členy posloupnosti: $0;1;4;9;16;25;...$ $\Rightarrow$ zdá se, že jde o rostoucí posloupnost $\Rightarrow$ musím dokázat $a_n < a_{n+1}$ pro všechna $n \in N$, $a_n = (1-n)^2$, $a_{n+1} = \left(1-[n+1]\right)^2 = (-n)^2 = n^2$

dosadím do nerovnosti: $(1-n)^2 < n^2$

$1 - 2n + n^2 < n^2$

$1 < 2n$

$n > 0,5$, protože platí, že $n \in N$ nerovnost platí $\Rightarrow$ posloupnost je rostoucí

Př. 7: Petáková:
strana 66/cvičení 74 c) d) e) g) h)

Shrnutí: