

8.1.1 Posloupnosti

Předpoklady: 2104

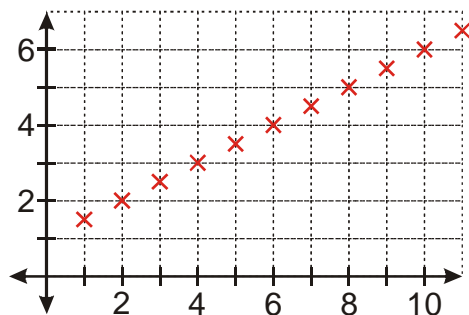
Začínáme návratem do blahých časů nevědomosti prvního ročníku - co je funkce?

Funkce na množině $A \subset R$ je předpis, který každému číslu z množiny A přiřazuje právě jedno reálné číslo. Množinu A nazýváme **definiční obor funkce**.

Zkusíme si několik funkcí.

Př. 1: Je dána funkce $f(x) = 1 + 0,5x$, $x \in N$. Zapiš tabulku hodnot pro prvních osm funkčních hodnot této funkce. Sestroj graf této funkce.

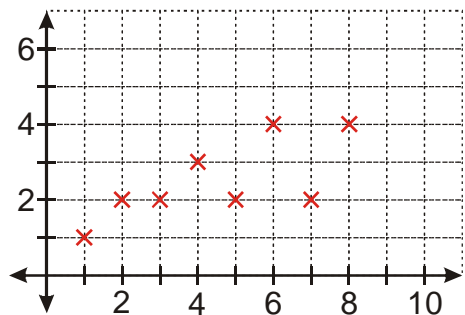
x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5



Pedagogická poznámka: Téměř všichni studenti nakreslí na první pokus graf předchozí funkce špatně, protože body spojí čarou. Neříkám jim, kde je problém, jenom je upozorním, že nemají výsledek dobře.

Př. 2: Je dána funkce $g(x)$, $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Hodnotou funkce $g(x)$ je počet všech dělitelů čísla (tedy včetně jedničky a čísla x). Zapiš tabulku hodnot a sestroj graf funkčních hodnot této funkce.

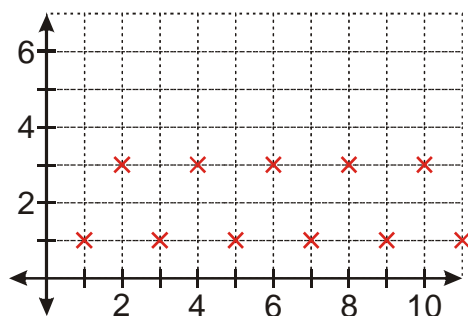
x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	2	2	3	2	4	2	4



Pedagogická poznámka: Předchozí posloupnost je zajímavá svým zadáním. Část studentů má značné problémy přiřazovat podle tohoto předpisu správné hodnoty.

Př. 3: Je dána funkce $h(x) = (-1)^x + 2$, $x \in N$. Zapiš tabulku hodnot pro prvních osm funkčních hodnot této funkce. Sestroj graf.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	3	1	3	1	3	1	3



Pedagogická poznámka: Posloupnost je zajímavá jako příklad „přeskakovací“ posloupnosti, která díky mocnině (-1) neustále mění znaménko.

Co mají naše funkce společného?

Definiční obor je podmnožina množiny přirozených čísel, začínající u jedničky a končící u nějakého čísla nebo pokračující do nekonečna \Rightarrow jenom díky tomu mají význam věty jako:

- prvních osm funkčních hodnot
- následující hodnota
- předchozí hodnota

Nic takového nemůžeme říct o funkci s definičním oborem R .

Jak jsou posloupnosti definovány?

Každá funkce, jejímž definičním oborem je množina N všech přirozených čísel, se nazývá **nekonečná posloupnost**.

Každá funkce, jejíž definiční obor je množina všech přirozených čísel $n \leq n_0$, kde n_0 je pevně dané číslo z N , se nazývá **konečná posloupnost**.

Př. 4: Vysvětli proč množina všech sudých přirozených čísel nemůže být definičním oborem nekonečné posloupnosti.

Definičním oborem nekonečné posloupnosti může být pouze množin všech přirozených čísel. V množině sudých čísel chybí lichá čísla.

Př. 5: Napiš konečnou podmnožinu množiny přirozených čísel, která nemůže být definičním oborem žádné konečné posloupnosti.

Konečná posloupnost má za definiční obor podmnožinu všech přirozených čísel menších než číslo $n_0 \Rightarrow$ každá nekompletní podmnožina nemůže být definičním oborem. Například jde o množinu $\{1; 2; 5\}$.

U posloupností používáme jiné značení i jiné pojmenování než u funkcí.

$g(4) = 3$ hodnota v bodě 4 je rovna 3	$g_4 = 3$ člen g_4 je roven 3
$f(x) = y$ hodnota funkce f v bodě x se rovná y	$f_n = s$ n -tý člen posloupnosti f je roven s
$f(x) : y = (-1)^x + 2, x \in N$	$\left((-1)^n + 2\right)_{n=1}^{\infty}$ nebo $(f_n)_{n=1}^{\infty}, f_n = (-1)^n + 2$

Př. 6: Pomocí zápisu pro posloupnosti zapiš:

a) $f(x) = \frac{x}{x+1}, x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

b) $g(x) = 2^x + x, x \in N$

c) $h(x) = \frac{1}{x^2}, x \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

a) $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^6$ nebo $(f_n)_{n=1}^6, f_n = \frac{n}{n+1}$

b) $(2^n + n)_{n=1}^{\infty}$ nebo $(g_n)_{n=1}^{\infty}, g_n = 2^n + n$

c) **nejde o posloupnost**

Dodatek: Funkci z bodu c) by přesto, že nejde o posloupnost, bylo možné zapsat ve tvaru

pro posloupnosti používaném takto $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n=3}^9$ nebo $(h_n)_{n=3}^9, h_n = \frac{1}{n^2}$.

Protože první řádek v tabulkách všech posloupností je stejný (liší se pouze v délce) je možné ho vynechat a psát místo:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	2	2	3	2	4	2	4

pouze: 1; 2; 2; 3; 2; 4; 2; 4

POZOR: Čísla musíme psát ve stejném pořadí v jaké se vyskytují v y-ovém řádku tabulky. Že hodnota 1,5 vznikla z jedničky víme jen díky tomu, že je uvedena první \Rightarrow stejná čísla v jiném pořadí udávají jinou posloupnost.

Pokud je posloupnost nekonečná, píšeme poslední napsanou hodnotu řady tři tečky:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
----------	---	---	---	---	---	---	---	---

y	1	3	1	3	1	3	1	3
----------	---	---	---	---	---	---	---	---

pouze: 1; 3; 1; 3; 1; ...

Př. 7: Je dána posloupnost $2; \sqrt{3}; -7; \frac{2}{3}; \pi^2; 123; -3; 1966; -81$. Urči: $a_1; a_4; a_5; a_8$.

Z posloupnosti hned můžeme psát:

$$a_1 = 2 \qquad a_4 = \frac{2}{3} \qquad a_5 = \pi^2 \qquad a_8 = 1966$$

Shrnutí: Definičním oborem posloupností jsou speciální podmnožiny přirozených čísel, které nám umožňují indexovat jejich hodnoty.