

7.5.18 Obecná rovnice hyperboly

Př. 1: Nakresli obrázek, vypočti souřadnice vrcholů, ohnisek, excentricitu a urči rovnice

asymptot hyperboly $\frac{(y-1)^2}{3} - (x+2)^2 = 1$.

Hlavní osou je přímka $x = -2$, střed $S[-2;1]$.

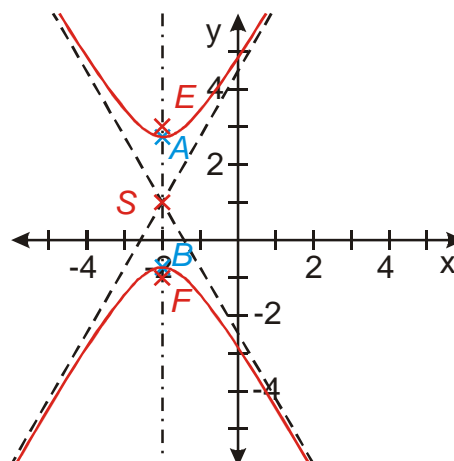
Hlavní poloosa: $b = \sqrt{3}$, vedlejší poloosa $b = 1$.

Excentricita: $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \Rightarrow e = 2$.

Vrcholy: $A[-2;1+\sqrt{3}]$, $B[-2;1-\sqrt{3}]$, ohniska:

$E[-2;-1]$, $F[-2;3]$.

Rovnice asymptot: $x+2 = \frac{y-1}{\sqrt{3}}$, $x+2 = -\frac{y-1}{\sqrt{3}}$.



Středovou rovnici hyperboly můžeme upravit do tvaru:

$$px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0; \quad pq < 0, \text{ který nazýváme } \mathbf{obecná rovnice hyperboly}.$$

Př. 2: Vysvětli, proč je u obecné rovnice hyperboly uvedena podmínka $pq < 0$.

Musíme zajistit, aby před jedním ze členů ve středové rovnici bylo záporné znaménko. Součin pq je menší než nula, právě když je jedno z čísel p, q záporné.

Při upravování rovnic je potřeba dát pozor na členy, před jejichž závorkou je mínus:

$4(x^2 + 2x + 1 - 1) - (y^2 + 2 \cdot 2y + 2^2 - 2^2) - 4 = 4(x+1)^2 - 4 - (y+2)^2 + 4 - 4 = 0 \Rightarrow$ po roznásobení zbytku závorky vznikne ze záporného čísla uvnitř závorky číslo kladné.

Př. 3: U následujících hyperbol najdi středový tvar. V případě dostatku času nakresli obrázek, vypočti souřadnice středu, vrcholů, excentricitu a urči rovnice asymptot.

a) $4x^2 - y^2 + 8x + 4y - 4 = 0$

b) $2x^2 - 4y^2 + 4x + 8y + 2 = 0$

c) $4x^2 + 8x - 4y^2 + 4y + 3 = 0$

d) $9x^2 - 4y^2 + 12y - 45 = 0$

a) $4x^2 - y^2 + 8x + 4y - 4 = 4x^2 + 8x - y^2 + 4y - 4 = 0$

$4(x+1)^2 - 4 - (y+2)^2 + 4 - 4 = 0 \quad 4(x+1)^2 - (y+2)^2 = 4 \quad /:4$

$$(x+1)^2 - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

Hlavní osou je přímka $y = -2$, střed $S[-1;-2]$.

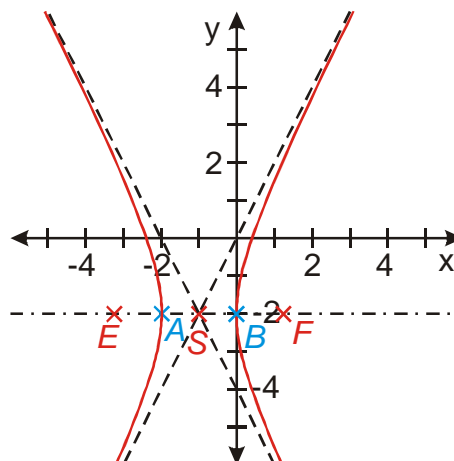
Hlavní poloosa: $a = 1$, vedlejší poloosa $b = 2$.

Excentricita: $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} \Rightarrow e = \sqrt{5}$.

Vrcholy: $A[0;-2]$, $B[-2;-2]$, ohniska:

$E[-1-\sqrt{5};-2]$, $F[-1+\sqrt{5};-2]$.

Rovnice asymptot: $x+1 = \frac{y+2}{2}$, $x+1 = -\frac{y+2}{2}$.



b) $2x^2 - 4y^2 + 4x + 8y + 2 = 0 \quad /:2$

$x^2 - 2y^2 + 2x + 4y + 1 = (x^2 + 2x + 1 - 1) - 2(y^2 - 2y + 1 - 1) + 1 = 0$

$$\frac{(x+1)^2}{-2} - \frac{2(y-1)^2}{-2} = 1 \quad (y-1)^2 - \frac{(x+1)^2}{2} = 1$$

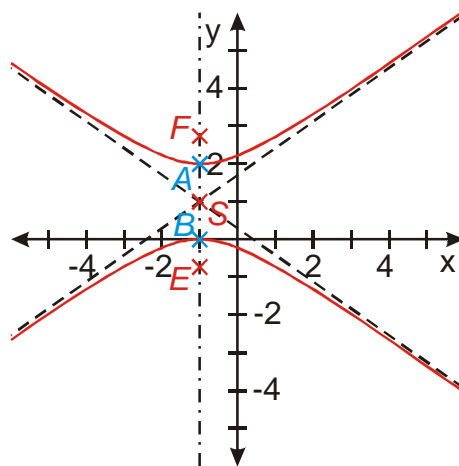
Hlavní osou je přímka $x = -1$, střed $S[-1;1]$.

Hlavní poloosa: $b = 1$, vedlejší poloosa $a = \sqrt{2}$.

Excentricita: $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} \Rightarrow e = \sqrt{3}$.

Vrcholy: $A[-1;2]$, $B[-1;0]$, ohniska: $E[-1;1-\sqrt{3}]$,
 $F[-1;1+\sqrt{3}]$.

Rovnice asymptot: $y-1 = \frac{x+1}{\sqrt{2}}$, $y-1 = -\frac{x+1}{\sqrt{2}}$.



c) $4x^2 + 8x - 4y^2 + 4y + 3 = 4(x^2 + 2x) - 4(y^2 - y) + 3 = 0$

$$4(x^2 + 2x + 1 - 1) - 4\left[y^2 - 2y \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + 3 = 0$$

$$4(x+1)^2 - 4 - 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 + 3 = 4(x+1)^2 - 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$(x+1)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ rovnice dvou přímek $2x - 2y + 3 = 0$, $2x + 2y + 1 = 0$.

d) $9x^2 - 4y^2 + 12y - 39 = 9x^2 - 4(y^2 - 3y) - 45 = 0$

$$9x^2 - 4\left[y^2 - 2y \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] - 45 = 9x^2 - 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + 9 - 45 = 0$$

$$9x^2 - 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 36 \quad /:36 \quad \frac{9x^2}{36} - \frac{4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{36} = 1 \quad \frac{x^2}{4} - \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{9} = 1$$

Hlavní osou je přímka $y = \frac{3}{2}$, střed $S\left[0; \frac{3}{2}\right]$.

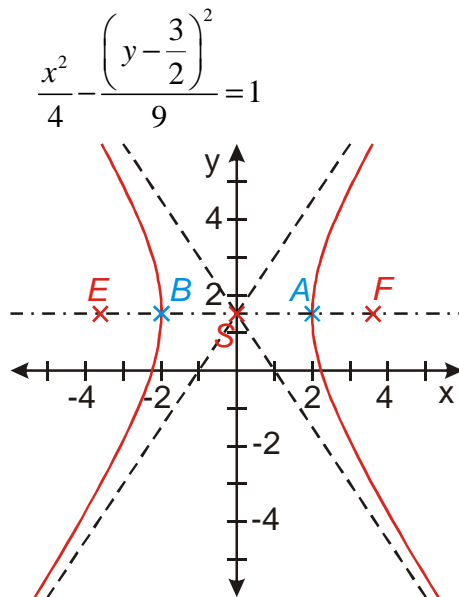
Hlavní poloosa: $a = 2$, vedlejší poloosa $b = 3$.

Excentricita: $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} \Rightarrow e = \sqrt{13}$.

Vrcholy: $A\left[-2; \frac{3}{2}\right]$, $B\left[2; \frac{3}{2}\right]$, ohniska: $E\left[-\sqrt{13}; \frac{3}{2}\right]$,

$F\left[\sqrt{13}; \frac{3}{2}\right]$.

Rovnice asymptot: $\frac{x}{2} = \frac{y - \frac{3}{2}}{3}$, $\frac{x}{2} = -\frac{y - \frac{3}{2}}{3}$.



Př. 4: Petáková:
 strana 128/cvičení 76 b) e) f)