

7.5.16 Hyperbola

Př. 1: Vypočti libovolný bod ležící na hyperbole dané funkcí $y = \frac{1}{x}$ a pomocí kalkulačky ověř, že absolutní hodnota z rozdílu jeho vzdáleností od bodů $F[\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ a $E[-\sqrt{2}; -\sqrt{2}]$ se rovná $2\sqrt{2}$.

Př. 2: (BONUS) Ukaž, že graf funkce $y = \frac{1}{x}$ je totožný s množinou všech bodů, jejichž absolutní hodnota rozdílu vzdáleností od bodů $F[\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ a $E[-\sqrt{2}; -\sqrt{2}]$ se rovná $2\sqrt{2}$.

Př. 3: Na základě výsledků příkladu 1 zformuluj planimetrickou definici hyperboly. Při formulaci využij planimetrickou definici elipsy.

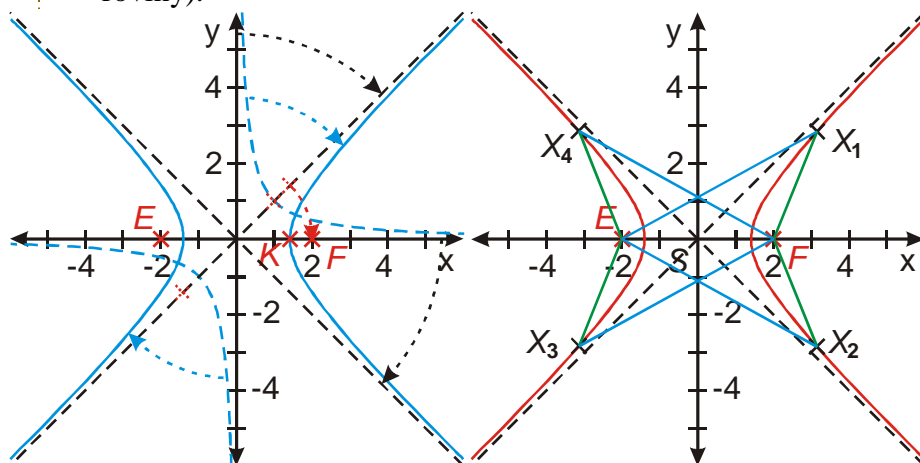
V rovině jsou dány dva různé body E, F . Množina všech bodů X roviny, pro které se $\|EX| - |FX||$ rovná danému kladnému číslu, které je menší než $|EF|$, se nazývá hyperbola. Body E, F se nazývají ohniska hyperboly.

Př. 4: Porovnej definici hyperboly a definici elipsy a vysvětli příčinu rozdílů.

Definice elipsy:

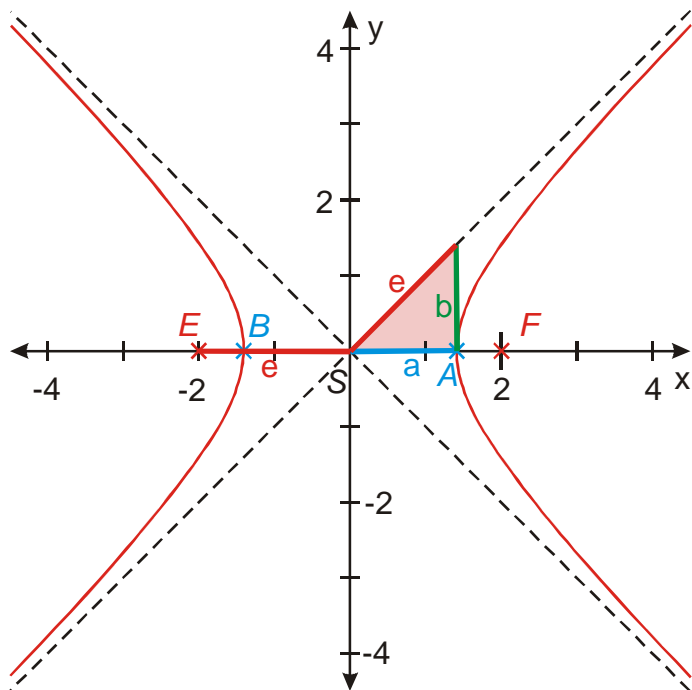
V rovině jsou dány dva body E, F . Množina všech bodů X roviny, pro které se součet $d = |EX| + |FX|$ vzdáleností bodů X od bodů E, F rovná danému číslu většímu než $|EF|$, se nazývá elipsa. Body E, F se nazývají ohniska elipsy.

- U hyperboly je požadavek na různost bodů $E, F \Rightarrow$ kdyby body E, F splynuly do jednoho, všechny body roviny by od nich měly stejnou vzdálenost \Rightarrow rozdíl by vyšel nulový. U elipsy splynutí nevadí, dostaneme kružnici, která je jejím speciálním případem.
- Jiný výraz spočtený ze vzdáleností od ohnisek – jasné, jde o jinou křivku.
- Číslo získané z výpočtu musí být u hyperboly menší než vzdálenost ohnisek \Rightarrow jinak by mezi body hyperboly nenáležel žádný bod mezi ohnisky (u elipsy musí být součet vzdáleností větší než vzdálenost ohnisek, jinak by podmínku nespĺňoval žádný bod roviny).



Př. 5: Urči souřadnice bodů E, F a K po otočení,

$|KO| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow K[\sqrt{2}; 0]$. $|FO| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2 \Rightarrow F[2; 0]$. Bod E má souřadnice: $E[-2; 0]$ (je s bodem F souměrný podle počátku).



Př. 6: Urči u nakreslené hyperboly velikosti poloos a excentricitu. Ověř platnost vztahu $e^2 = a^2 + b^2$.

Hyperbolu, pro kterou platí $a = b$ (poloosy jsou shodné), nazýváme **rovnoosá hyperbola**.

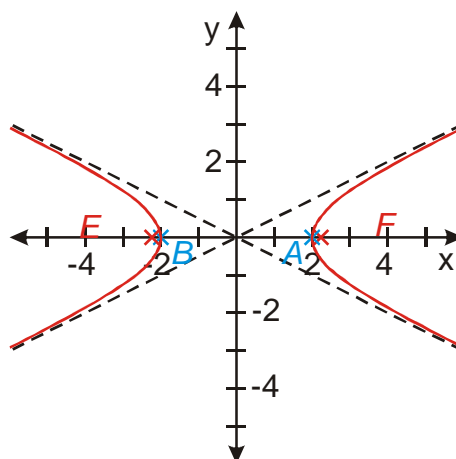
Př. 7: Nakresli obrázek, vypočti souřadnice vrcholů, excentricitu a urči rovnice asymptot hyperboly se středem v počátku soustavy souřadnic, pokud je její hlavní osa totožná s osou x a platí pro ni $a = 2$, $b = 1$.

$$e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} \Rightarrow e = \sqrt{5}$$

Vrcholy: $A[2;0]$, $B[-2;0]$.

Ohniska: $E[-\sqrt{5};0]$, $F[\sqrt{5};0]$.

Rovnice asymptot: $y = \frac{1}{3}x$, $y = -\frac{1}{3}x$.



Př. 8: Petáková:
strana 126/cvičení 41 a) c) d)