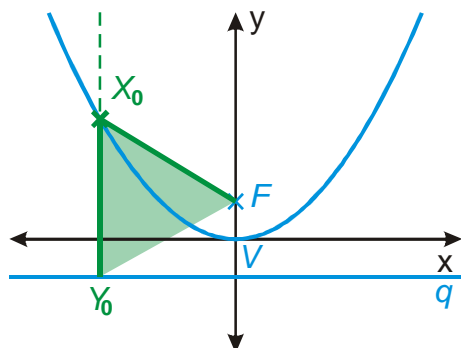


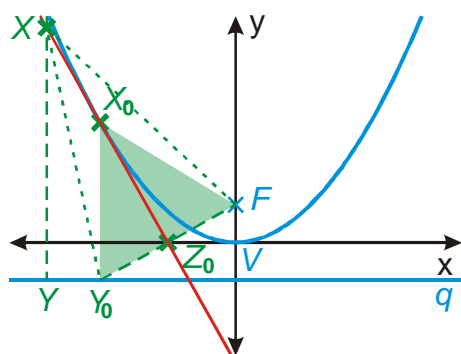
## 7.5.15 Parabola a přímka

**Př. 1:** Na obrázku je nakreslena parabola  $x^2 = 2py$  s ohniskem  $F$ , řídicí přímkou  $q$  a vrcholem  $V[0;0]$ . Bod  $X_0[x_0; y_0]$  je libovolný bod paraboly různý od vrcholu. Označ patu kolmice vedené bodem  $X_0$  na přímkou  $q$  jako  $Y_0$ . Rozhodni na základě vlastností paraboly, zda vzniklý trojúhelník  $X_0FY_0$  je obecný nebo má speciální vlastnosti (rovnoramennost, rovnoramennost, pravoúhlost ...).



Z definice paraboly vyplývá:  $|X_0F| = |X_0q| = |X_0Y_0| \Rightarrow$  trojúhelník  $X_0FY_0$  je rovnoramenný se základnou  $Y_0F$ .

**Př. 2:** (BONUS) Střed úsečky  $FY_0$  z předchozího příkladu označ  $Z_0$ . Odhadni a poté dokaž, kolik společných bodů má přímka  $X_0Z_0$  s parabolou  $x^2 = 2py$ .



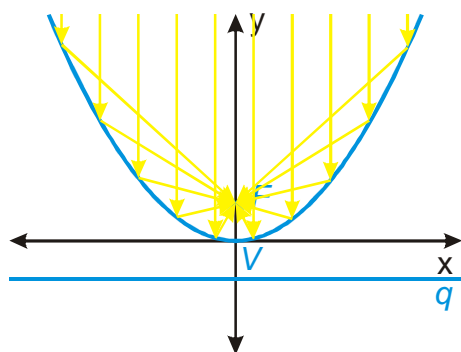
Trojúhelník  $X_0FY_0$  je rovnoramenný  $\Rightarrow$  přímka  $Z_0X_0$  je jeho osou a tedy i osou strany  $FY_0 \Rightarrow$  všechny body této přímky jsou stejně vzdálené od krajních bodů  $F$  a  $Y_0 \Rightarrow |XF| = |XY_0|$ .

Zkontrolujeme, zda bod  $X$  splňuje podmínku pro bod paraboly:  $|XF| = |Xq| = |XY|$ .

Z obrázku je vidět, že platí:  $|XY| < |XY_0| = |XF| \Rightarrow |Xq| < |XF| \Rightarrow$  bod  $X$  určitě není bodem paraboly.

Parabola u satelitu soustřeďuje paprsky signálu (které pocházejí z velmi vzdáleného zdroje a tak jsou prakticky rovnoběžné) do svého ohniska (kde je namontovaný přijímač).

Obráceně funguje parabola u reflektorů. V ohnisku parabolického zrcadla je umístěna žárovka a parabolické zrcadlo odráží paprsky z žárovky do vodorovného proudu světla.



**Př. 3:** Najdi rovnici tečny dané paraboly v daném bodě:

a)  $(x+1)^2 = 4(y+2)$ ;  $X_0[1; ?]$

b)  $y^2 = -x$ ;  $X_0[?; 2]$ .

Správnost dosazení ověř výpočtem průsečíků přímky s parabolou.

a)  $(x+1)^2 = 4(y+2)$   $X_0[1; ?]$

Hledáme tečnu paraboly  $(x+1)^2 = 4(y+2)$  v bodě  $X_0[1; -1]$ .

$$2x+2 = 2y+4+2 \quad 2x-2y-4=0 \quad x-y-2=0.$$

$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0 \Rightarrow$  jediný průsečík s  $x$ -vou souřadnicí  $x=1$  (bod ze zadání).

b)  $y^2 = -x$   $X_0[?; 2]$

Hledáme tečnu paraboly  $(y-0)^2 = -2\frac{1}{2}(x-0)$  v bodě  $X_0[-4;2]$ .

$$2y = -\frac{x}{2} + 2 \quad / \cdot 2 \quad 4y = -x + 4 \quad x + 4y - 4 = 0.$$

$$y^2 - 4y + 4 = 0 \quad (y-2)^2 = 0$$

**Př. 4:** Urči vzájemnou polohu paraboly  $x^2 - 4x - y + 1 = 0$  a přímky  $x - y - 3 = 0$ .

$$x - y - 3 = 0 \Rightarrow y = x - 3. \quad x^2 - 4x - y + 1 = x^2 - 4x - (x - 3) + 1 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad (x-4)(x-1) = 0 \Rightarrow \text{dva kořeny:}$$

- $x_1 = 4 \Rightarrow y_1 = x_1 - 3 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow P_1[4;1]$
- $x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = x_2 - 3 = 1 - 3 = -2 \Rightarrow P_2[1;-2]$

**Př. 5:** Je dána parabola  $(y-2)^2 = 2(x-1)$ . Najdi tečny této paraboly procházející bodem  $X[-3;1]$ .

$$X[-3;1]: (y-1) = k(x+3) \text{ a přímka } x = -3. \quad y = kx + 3k + 1.$$

$$(kx + 3k + 1 - 2)^2 = 2(x-1) \quad (kx + 3k - 1)(kx + 3k - 1) = 2x - 2$$

$$k^2x^2 + 6k^2x - 2kx - 2x + 9k^2 - 6k + 3 = 0 \quad k^2x^2 + (6k^2 - 2k - 2)x + 9k^2 - 6k + 3 = 0$$

$$k = 0. \quad \text{Dosadíme: } 0^2x^2 + (6 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 2)x + 9 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 3 = 0.$$

$$-2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} - \text{jediný průsečík} \Rightarrow \text{pro } k = 0 \text{ má přímka } y = kx + 3k + 1 = 1 \text{ s parabolou}$$

$$k \neq 0: D = b^2 - 4ac = (6k^2 - 2k - 2)^2 - 4 \cdot k^2(9k^2 - 6k + 3) = 0$$

$$(3k^2 - k - 1)(3k^2 - k - 1) - k^2(9k^2 - 6k + 3) = 0$$

$$9k^4 - 3k^3 - 3k^2 - 3k^3 + k^2 + k - 3k^2 + k + 1 - 9k^4 + 6k^3 - 3k^2 = 0$$

$$-8k^2 + 2k + 1 = 0 \quad 8k^2 - 2k - 1 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-1)}}{2 \cdot 8} = \frac{2 \pm 6}{16}$$

- $k_1 = \frac{2+6}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{tečna } 2y - 2 = x + 3 \Rightarrow x - 2y + 5 = 0$
- $k_2 = \frac{2-6}{16} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \text{tečna } 4y - 4 = -x - 3 \Rightarrow x + 4y - 1 = 0$

