

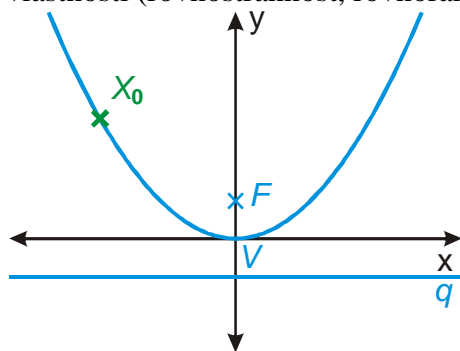
## 7.5.15 Parabola a přímka

**Předpoklady:** 7505, 7506, 7511, 7512, 7513

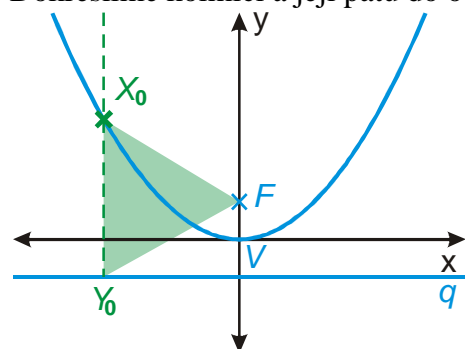
**Pedagogická poznámka:** Na probrání celého obsahu je třeba tak jeden a půl vyučovací hodiny. Pokud tolik času nemáte, je potřeba buď rychle proběhnout úvodní část nebo vynechat poslední příklad a zadat ho na domácí přípravu.

Čeká nás poslední hodina o parabolách a stále ještě nevíme, proč se satelitní anténě říká parabola  $\Rightarrow$  nejvyšší čas rozřešit tuto záhadu.

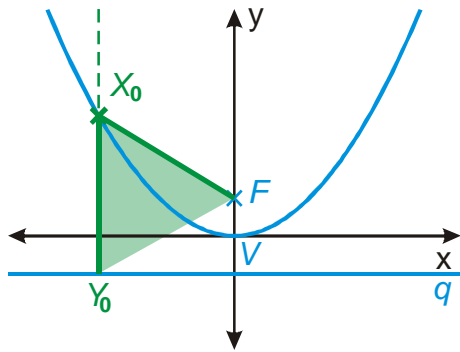
**Př. 1:** Na obrázku je nakreslena parabola  $x^2 = 2py$  s ohniskem  $F$ , řídicí přímkou  $q$  a vrcholem  $V[0;0]$ . Bod  $X_0[x_0; y_0]$  je libovolný bod paraboly různý od vrcholu. Označ patu kolmice vedené bodem  $X_0$  na přímku  $q$  jako  $Y_0$ . Rozhodni na základě vlastností paraboly, zda vzniklý trojúhelník  $X_0FY_0$  je obecný nebo má speciální vlastnosti (rovnostřannost, rovnoramennost, pravouhlost ...).



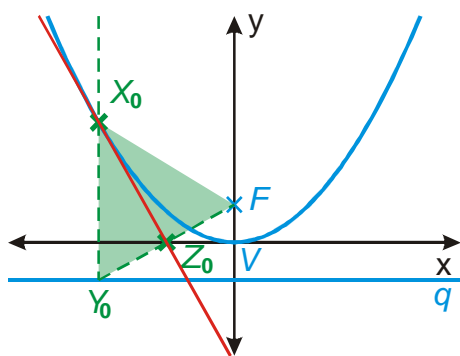
Dokreslíme kolmici a její patu do obrázku:



Z definice paraboly vyplývá:  $|X_0F| = |X_0q| = |X_0Y_0| \Rightarrow$  trojúhelník  $X_0FY_0$  je rovnoramenný se základnou  $Y_0F$ .

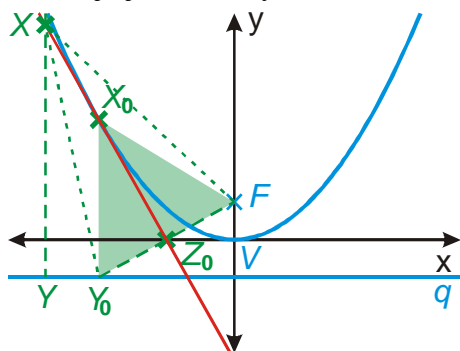


**Př. 2:** (BONUS) Střed úsečky  $FY_0$  z předchozího příkladu označ  $Z_0$ . Odhadni a poté dokaž, kolik společných bodů má přímka  $X_0Z_0$  s parabolou  $x^2 = 2py$ .



Podle obrázku se zdá, že nakreslená přímka má s parabolou jediný společný bod  $X_0$  a je její tečnou.

Důkaz je jednoduchý. Nakreslíme si libovolný bod přímky  $Z_0X_0$  různý od  $X_0$ .



Trojúhelník  $X_0FY_0$  je rovnoramenný  $\Rightarrow$  přímka  $Z_0X_0$  je jeho osou a tedy i osou strany  $FY_0 \Rightarrow$  všechny body této přímky jsou stejně vzdálené od krajních bodů  $F$  a  $Y_0 \Rightarrow |XF| = |XY_0|$ .

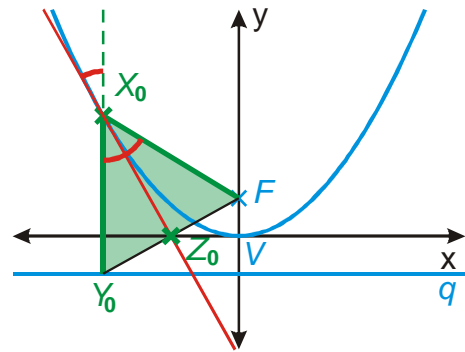
Zkontrolujeme, zda bod  $X$  splňuje podmínku pro bod parabol:  $|XF| = |Xq| = |XY|$ .

Z obrázku je vidět, že platí:  $|XY| < |XY_0| = |XF| \Rightarrow |Xq| < |XF| \Rightarrow$  bod  $X$  určitě není bodem parabol.

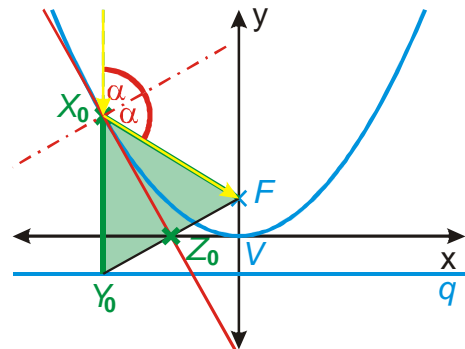
Proč jsme to všechno dělali?

1. Z našeho obrázku už je možné snadno odvodit rovnici tečny parabol.
2. Teď už snadno ukážeme, proč chytáme satelit pomocí parabol.

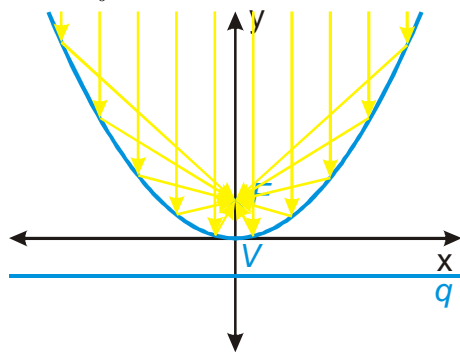
Přímka  $Z_0X_0$  je osou trojúhelníku  $\Rightarrow$  dělí úhel  $Y_0X_0F$  na dvě stejné poloviny  $\Rightarrow$  všechny tři vyznačené úhly jsou stejné (věta o vrcholových úhlech).



Protože tečna udává směr paraboly v bodě  $X_0$ , udává i rovinu, od které se odráží paprsek, který v tomto místě dopadne na parabolu. Vyznačené úhly pak ukazují, že paprsek rovnoběžný s osou paraboly se odrazí do jejího ohniska.



Bod  $X_0$  jsme volili libovolně  $\Rightarrow$  pravidlo o odrazu platí pro všechny body paraboly.



Parabola u satelitu soustřeďuje paprsky signálu (které pocházejí z velmi vzdáleného zdroje a tak jsou prakticky rovnoběžné) do svého ohniska (kde je namontovaný přijímač).  
Obráceně funguje parabola u reflektorů. V ohnisku parabolického zrcadla je umístěna žárovka a parabolické zrcadlo odráží paprsky z žárovky do vodorovného proudu světla.

Vrátíme se k tečnám paraboly. Nebudeme si je odvozovat z předchozích obrázků, použijeme nápodobu s tečnami elipsy a kružnice.

Hledáme tečnu paraboly  $(x-m)^2 = 2p(y-n)$  v bodě  $X[x_0; y_0]$ , který na ní leží.

- Rovnice paraboly ve vrcholovém tvaru:  $(x-m)^2 = 2p(y-n)$ .
- Rozložíme závorky s neznámými:  $(x-m)(x-m) = p(y-n) + p(y-n)$  (závorku na pravé straně nemůžeme rozložit na součin, protože není na druhou. Můžeme ji však napsat jako součet, protože je násobená dvěma).
- Vždy jednu neznámou nahradíme souřadnicí bodu  $X_0$ :

$$(x_0 - m)(x - m) = p(y_0 - n) + p(y - n).$$

Kupodivu to funguje.

**Pedagogická poznámka:** Pro „odvození“ rovnice tečny u paraboly jsem zvolil předchozí postup ze těchto důvodů:

Klasické odvození je dlouhé, studenti ho příliš nesledují a sami ho nejsou schopni provést. Zbývá tak málo času na počítání příkladů.

Klasicky se odvozuje pouze rovnice pro speciální polohu paraboly s vrcholem

v počátku soustavy souřadnic.

Pro čtyři různé tvary vrcholové rovnice, máme čtyři různé tvary rovnice tečny  $\Rightarrow$  považuji za užitečnější ukázat postup, jak získávat tyto rovnice z rovnic parabol, aby se studenti zbytečně nesnažili zapamatovat si čtyři vzorce.

**Pro každý z druhů paraboly existuje odpovídající rovnice tečny v jejím bodě  $X_0[x_0; y_0]$ :**

$$(x-m)^2 = 2p(y-n) \quad \Rightarrow \quad (x_0-m)(x-m) = p(y_0-n) + p(y-n)$$

$$(x-m)^2 = -2p(y-n) \quad \Rightarrow \quad (x_0-m)(x-m) = -p(y_0-n) - p(y-n)$$

$$(y-n)^2 = 2p(x-m) \quad \Rightarrow \quad (y_0-n)(y-n) = p(x_0-m) + p(x-m)$$

$$(y-n)^2 = -2p(x-m) \quad \Rightarrow \quad (y_0-n)(y-n) = -p(x_0-m) - p(x-m)$$

**Př. 3:** Najdi rovnici tečny dané paraboly v daném bodě:

a)  $(x+1)^2 = 4(y+2); X_0[1; ?]$                       b)  $y^2 = -x; X_0[?; 2]$ .

Správnost dosazení ověř výpočtem průsečíků přímky s parabolou.

a)  $(x+1)^2 = 4(y+2) \quad X_0[1; ?]$

Určíme druhou souřadnici bodu  $X_0: (1+1)^2 = 4(y+2)$ .

$$4 = 4(y+2)$$

$$y+2=1 \Rightarrow y=-1$$

Hledáme tečnu paraboly  $(x+1)^2 = 4(y+2)$  v bodě  $X_0[1; -1]$ .

Vzorec pro tečnu:  $(x_0+1)(x+1) = 2(y+2) + 2(y_0+2)$ .

Dosadíme bod  $X_0[1; -1]: (1+1)(x+1) = 2(y+2) + 2(-1+2)$ .

$$2x+2 = 2y+4+2$$

$$2x-2y-4=0$$

Rovnice tečny:  $x-y-2=0$ .

Určíme společné body dosazením, z rovnice tečny vyjádříme  $y: y = x-2$ .

Dosadíme do rovnice paraboly:  $(x+1)^2 = 4([x-2]+2)$ .

$$x^2 + 2x + 1 = 4x$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0 \Rightarrow \text{jediný průsečík s } x\text{-vou souřadnicí } x=1 \text{ (bod ze zadání)}.$$

b)  $y^2 = -x \quad X_0[?; 2]$

Určíme druhou souřadnici bodu  $X_0: 2^2 = -x \Rightarrow x = -4$ .

Hledáme tečnu paraboly  $(y-0)^2 = -2\frac{1}{2}(x-0)$  v bodě  $X_0[-4; 2]$ .

Vzorec pro tečnu:  $(y_0-0)(y-0) = -\left(\frac{x}{2}-0\right) - \left(\frac{x_0}{2}-0\right)$ .

Dosadíme bod  $X_0[-4; 2]: 2y = -\frac{x}{2} - \frac{-4}{2}$ .

$$2y = -\frac{x}{2} + 2 \quad / \cdot 2$$

$$4y = -x + 4$$

Tečná má rovnici:  $x + 4y - 4 = 0$ .

Určíme společné body dosazením, z rovnice tečny vyjádříme  $x$ :  $x = 4 - 4y$ .

Dosadíme do rovnice paraboly:  $y^2 = -(4 - 4y)$ .

$$y^2 - 4y + 4 = 0$$

$(y - 2)^2 = 0 \Rightarrow$  jediný průsečík s  $y$ -ovou souřadnicí  $y = 2$  (bod ze zadání).

**Poznámka:** Rovnici tečny v bodě b) můžeme samozřejmě zapisovat rovnou bez dosazování souřadnic počátku  $[0;0]$  takto:  $y^2 = -x \Rightarrow yy_0 = -\frac{x}{2} - \frac{x_0}{2}$ .

**Pedagogická poznámka:** Části studentů bude působit obrovské problémy dopočítání zbývající souřadnice. Tuto část příkladu je lepší odtajnit brzo.

**Př. 4:** Urči vzájemnou polohu paraboly  $x^2 - 4x - y + 1 = 0$  a přímky  $x - y - 3 = 0$ .

Vzájemná poloha  $\Rightarrow$  určíme průsečíky  $\Rightarrow$  řešíme soustavu rovnic: 
$$\begin{cases} x^2 - 4x - y + 1 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

Nejjednodušší je vyjádřit z druhé rovnice  $y$  a dosadit do první (je tam pouze jedenkrát):

$$x - y - 3 = 0 \Rightarrow y = x - 3.$$

$$x^2 - 4x - y + 1 = x^2 - 4x - (x - 3) + 1 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$(x - 4)(x - 1) = 0 \Rightarrow$  dva kořeny:

- $x_1 = 4 \Rightarrow y_1 = x_1 - 3 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow P_1[4;1]$
- $x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = x_2 - 3 = 1 - 3 = -2 \Rightarrow P_2[1;-2]$

Přímka má s parabolou dva průsečíky  $P_1[4;1]$  a  $P_2[1;-2]$ , je tedy její sečnou.

**Př. 5:** Je dána parabola  $(y - 2)^2 = 2(x - 1)$ . Najdi tečny této paraboly procházející bodem  $X[-3;1]$ .

Bod  $X$  neleží na parabole  $\Rightarrow$  nemůžeme použít vzorce pro tečny  $\Rightarrow$  stejný postup jako u ostatních kuželoseček: všechny přímky bodem  $X$  a z nich vybereme ty s jedním průsečíkem.

Přímky procházející bodem  $X[-3;1]$ :  $(y - 1) = k(x + 3)$  a přímka  $x = -3$ .

Vyjádříme  $y$  a dosadíme do rovnice paraboly:  $y = kx + 3k + 1$ .

$$(kx + 3k + 1 - 2)^2 = 2(x - 1)$$

$$(kx + 3k - 1)(kx + 3k - 1) = 2x - 2$$

$$k^2x^2 + 3k^2x - kx + 3k^2x + 9k^2 - 3k - kx - 3k + 1 = 2x - 2$$

$$k^2x^2 + 6k^2x - 2kx + 9k^2 - 6k + 1 = 2x - 2$$

$$k^2x^2 + 6k^2x - 2kx - 2x + 9k^2 - 6k + 3 = 0$$

$$k^2x^2 + (6k^2 - 2k - 2)x + 9k^2 - 6k + 3 = 0$$

Abychom mohli dosadit do vzorce, musíme prozkoumat možnost  $k = 0$ .

$$\text{Dosadíme: } 0^2x^2 + (6 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 2)x + 9 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 3 = 0.$$

$$-2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ - jediný průsečík } \Rightarrow \text{ pro } k = 0 \text{ má přímka } y = kx + 3k + 1 = 1 \text{ s parabolou}$$

jediný průsečík.

Nyní předpokládáme  $k \neq 0$ , určíme diskriminant rovnice:

$$D = b^2 - 4ac = (6k^2 - 2k - 2)^2 - 4 \cdot k^2(9k^2 - 6k + 3) = 0$$

$$2^2(3k^2 - k - 1)^2 - 4 \cdot k^2(9k^2 - 6k + 3) = 0 \quad /:4$$

$$(3k^2 - k - 1)(3k^2 - k - 1) - k^2(9k^2 - 6k + 3) = 0$$

$$9k^4 - 3k^3 - 3k^2 - 3k^3 + k^2 + k - 3k^2 + k + 1 - 9k^4 + 6k^3 - 3k^2 = 0$$

$$-8k^2 + 2k + 1 = 0$$

$$8k^2 - 2k - 1 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-1)}}{2 \cdot 8} = \frac{2 \pm 6}{16}$$

$$\bullet \quad k_1 = \frac{2+6}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{tečna } (y-1) = \frac{1}{2}(x+3) \quad / \cdot 2$$

$$2y - 2 = x + 3 \Rightarrow x - 2y + 5 = 0$$

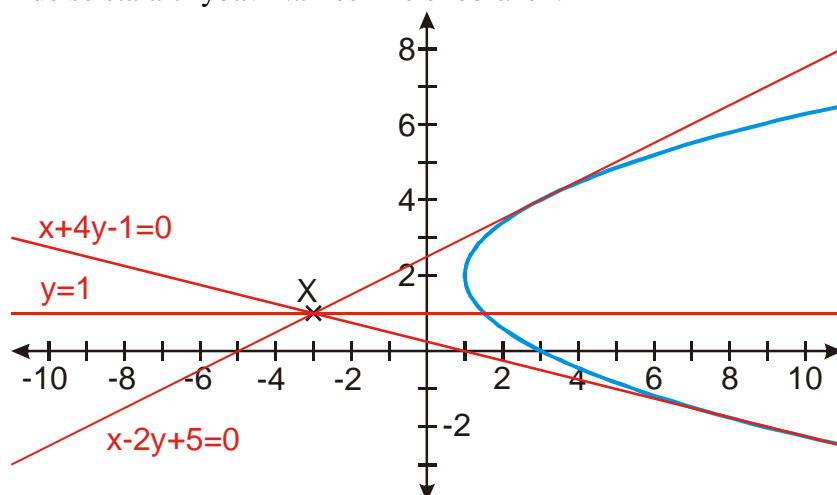
$$\bullet \quad k_2 = \frac{2-6}{16} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \text{tečna } (y-1) = -\frac{1}{4}(x+3) \quad / \cdot 4$$

$$4y - 4 = -x - 3 \Rightarrow x + 4y - 1 = 0$$

Výsledek není úplně bez problémů. Očekávali jsme dvě tečny, ale vyšly nám tři přímky:

- $y = 1$
- $x - 2y + 5 = 0$
- $x + 4y - 1 = 0$

Kde se stala chyba? Nakreslíme si obrázek:



Přímka  $y = 1$  rozhodně nevypadá jako tečna, i když má s parabolou pouze jeden průsečík, za tečnu ji nepovažujeme (asi bychom potřebovali přesnější definici tečny, ale nebudeme to zatím řešit).

⇒ Každým bodem, který se nachází ve vnější oblasti paraboly, procházejí tři přímky, které mají s parabolou jediný společný bod:

- dvě tečny,
- přímka rovnoběžná s osou paraboly.

**Př. 6:** Petáková:

strana 129/cvičení 81 c)

strana 129/cvičení 84 b)

strana 130/cvičení 87

strana 129/cvičení 92 d)

strana 129/cvičení 94 a)

**Shrnutí:** Z bodu ležícího ve vnější oblasti paraboly je k parabole možné sestavit tři přímky s jediným společným bodem, kromě dvou tečen i rovnoběžku s osou paraboly. Ostatní vztahy mezi přímkou a parabolou jsou analogické situaci u elips.