

7.5.11 Elipsa a přímka

Př. 1: Sepiš všechny možné vzájemné polohy elipsy a přímky. Ke každému případu nakresli obrázek.

Je-li bod $X_0[x_0; y_0]$ **bodem elipsy** $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ **má tečna této elipsy v tomto**

$$\text{bodě rovnici: } \frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2} + \frac{(y_0-n)(y-n)}{b^2} = 1.$$

Př. 2: Urči rovnici tečny:

a) elipsy $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ v jejím bodě $X_0\left[1; \frac{3}{2}\right]$;

b) elipsy $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$ v jejím bodě $Y\left[0; \frac{36}{5}\right]$.

a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow \frac{(x_0-0)(x-0)}{4} + \frac{(y_0-0)(y-0)}{3} = 1$, dosadíme $X_0\left[1; \frac{3}{2}\right]$.

$$\frac{1 \cdot x}{4} + \frac{\frac{3}{2} \cdot y}{3} = 1 \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1 \quad / \cdot 4 \quad x + 2y = 4 \quad x + 2y - 4 = 0$$

b) $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{(x_0-3)(x-3)}{25} + \frac{(y_0-4)(y-4)}{16} = 1$, dosadíme $Y\left[0; \frac{36}{5}\right]$.

$$\frac{(0-3)(x-3)}{25} + \frac{\left(\frac{36}{5}-4\right)(y-4)}{16} = 1 \quad \frac{-3(x-3)}{25} + \frac{\frac{16}{5}(y-4)}{16} = 1$$

$$\frac{-3(x-3)}{25} + \frac{(y-4)}{5} = 1 \quad / \cdot 25 \quad -3(x-3) + 5(y-4) = 25$$

$$-3x + 9 + 5y - 20 = 25 \quad -3x + 5y - 36 = 0 \quad 3x - 5y + 36 = 0$$

Př. 3: Urči průsečíky přímky $x + y - 1 = 0$ s elipsou $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. Jaká je jejich vzájemná poloha?

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad / \cdot 12 \quad 3x^2 + 4y^2 = 12$$

$$x + y - 1 = 0 \quad \underline{\quad \quad \quad y = 1 - x \quad \quad \quad 3x^2 + 4(1-x)^2 = 12}$$

$$3x^2 + 4(1-2x+x^2) = 12 \quad 3x^2 + 4 - 8x + 4x^2 = 12 \quad 7x^2 - 8x - 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-8)}}{2 \cdot 7} = \frac{8 \pm 4\sqrt{18}}{2 \cdot 7} = \frac{4 \pm 6\sqrt{2}}{7}$$

- $x_1 = \frac{4+6\sqrt{2}}{7} \Rightarrow y_1 = 1 - x_1 = 1 - \frac{4+6\sqrt{2}}{7} = \frac{3-6\sqrt{2}}{7}$

- $x_2 = \frac{4-6\sqrt{2}}{7} \Rightarrow y_2 = 1 - x_2 = 1 - \frac{4-6\sqrt{2}}{7} = \frac{3+6\sqrt{2}}{7}$

Př. 4: Urči jak závisí vzájemná poloha elipsy $4x^2 + 3y^2 - 16 = 0$ a přímky $2x + 3y + c = 0$ na hodnotě parametru c . Ještě než začneš příklad řešit početně, nakresli si náčrtek a co nejpřesněji odhadni, jak bude početní řešení příkladu vypadat.

$$4x^2 + 3y^2 - 16 = 0 \Rightarrow (2x)^2 + 3y^2 - 16 = 0$$

$$2x + 3y + c = 0 \qquad \qquad \qquad 2x = -3y - c$$

$$(-3y - c)^2 + 3y^2 - 16 = 0 \quad (3y + c)^2 + 3y^2 - 16 = 0$$

$$9y^2 + 6yc + c^2 + 3y^2 - 16 = 0 \quad 12y^2 + 6yc + c^2 - 16 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-6c \pm \sqrt{36c^2 - 48 \cdot c^2 + 48 \cdot 16}}{24} = \frac{-6c \pm \sqrt{48 \cdot 16 - 12c^2}}{24}$$

$$-(c^2 - 64) = -(c - 8)(c + 8) \geq 0$$

1. $c \in (-8; 8) \Rightarrow$ diskriminant rovnice $D = 64 - c^2 > 0$

2. $c = -8$ nebo $c = 8 \Rightarrow$ diskriminant rovnice $D = 64 - c^2 = 0$

- $c = 8 \quad y_{1,2} = \frac{-6 \cdot 8 \pm 0}{24} = -2 \Rightarrow 2x = -3y - c = -3(-2) - 8 = -2 \Rightarrow x = -1$
 $\Rightarrow T_1[-1; -2]$

- $c = -8 \quad y_{1,2} = \frac{-6 \cdot (-8) \pm 0}{24} = 2 \Rightarrow 2x = -3y - c = -3(2) - (-8) = 2 \Rightarrow x = 1$
 $\Rightarrow T_2[1; 2]$

3. $c \in (-\infty; -8) \cup (8; \infty) \Rightarrow$ diskriminant rovnice $D = 64 - c^2 < 0$

Př. 5: Najdi tečny elipsy $5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$ procházející bodem $A[0; -3]$.

$(y - y_0) = k(x - x_0) \Rightarrow (y + 3) = kx$, přímku $x = 0$ nemusíme sledovat, je určitě sečnou elipsy $5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$.

$$5x^2 + 9(kx - 3)^2 - 45 = 0 \quad 5x^2 + 9(k^2x^2 - 6kx + 9) - 45 = 0$$

$$5x^2 + 9k^2x^2 - 54kx + 81 - 45 = 0 \quad (5 + 9k^2)x^2 - 54kx + 36 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-54k)^2 - 4(5 + 9k^2)36 = 2916k^2 - 1296k^2 - 720 = 0$$

$$1620k^2 - 720 = 0 \quad k^2 = \frac{720}{1620} = \frac{72}{162} = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}$$

- $k_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow t_1: y = \frac{2}{3}x - 3 \Rightarrow t_1: 2x - 3y - 9 = 0$

- $k_2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow t_2: y = -\frac{2}{3}x - 3 \Rightarrow t_2: 2x + 3y + 9 = 0$

Př. 6: Petáková:

- strana 130/cvičení 90 d)
- strana 130/cvičení 92 a)
- strana 130/cvičení 94 b)
- strana 131/cvičení 95 b)
- strana 130/cvičení 96 d)