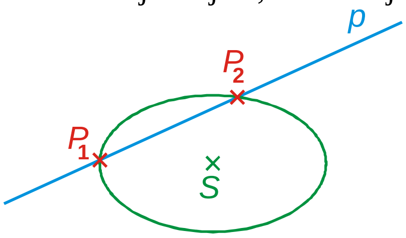
7.5.11 Elipsa a přímka

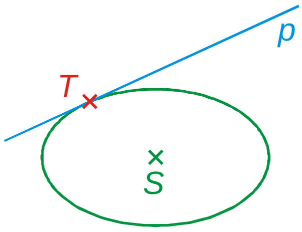
Předpoklady: 7504, 7505, 7508

Př. 1: Sepiš všechny možné vzájemné polohy elipsy a přímky. Ke každému případu nakresli obrázek.

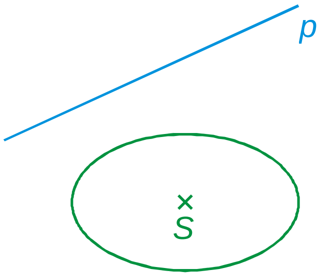
Z obrázků je zřejmé, že existují tři případy vzájemné polohy kružnice a přímky:



- Přímka se protíná s elipsou ve dvou různých bodech.
- Říkáme, že přímka je **sečnou** elipsy.



- Přímka se protíná s elipsou právě v jednom bodě.
- Říkáme, že přímka je **tečnou** elipsy.



- Přímka se neprotíná s elipsou v žádném bodě.
- Říkáme, že přímka je **vnější přímkou** elipsy.

Stejné možnosti jako u kružnice (očekávatelné, když je kružnice speciálním případem elipsy), bohužel bez speciálních vlastností (kolmost poloměru na tečnu, Thaletova kružnice…) $\Rightarrow$ příklady musíme řešit pomocí parametrů (těžká práce).

Stejně jako u kružnice i u elipsy existuje vzorec pro tečnu v jejím bodě.

Je-li bod $X_0[x_0;y_0]$ bodem elipsy $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$ má tečna této elipsy v tomto bodě rovnici: $\frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2}+\frac{(y_0-n)(y-n)}{b^2}=1$.

Podobná pomůcka na zapamatování jako u tečny kružnice:

- Středová rovnice elipsy $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$.
- Rozložíme dvojčleny: $\frac{(x-m)(x-m)}{a^2}+\frac{(y-n)(y-n)}{b^2}=1$.

- V každém součinu zaměníme jedno x za x_0 (a jedno y za y_0):
  $\frac{(x_0-m)(x-m)}{a^2}+\frac{(y_0-n)(y-n)}{b^2}=1$.

Pedagogická poznámka: Rovnice tečny pro elipsy se středem v počátku soustavy souřadnic neuvádím schválně. Považuji ji za zbytečnou, její ekvivalent pro kružnici také nepoužíváme a zbytečně zvětšuje chaos ve studentských hlavách.

Př. 2: Urči rovnici tečny:

a) elipsy $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ v jejím bodě $X_0\left[1;\frac{3}{2}\right]$;

b) elipsy $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$ v jejím bodě $Y\left[0;\frac{36}{5}\right]$.

V obou případech dosadíme do vzorce.

a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \Rightarrow \frac{(x_0-0)(x-0)}{4}+\frac{(y_0-0)(y-0)}{3}=1$, dosadíme $X_0\left[1;\frac{3}{2}\right]$.

$$\frac{1\cdot x}{4}+\frac{\frac{3}{2}\cdot y}{3}=1$$

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1 \quad /\cdot 4$$

$$x+2y=4$$

$$x+2y-4=0$$

b) $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{16}=1 \Rightarrow \frac{(x_0-3)(x-3)}{25}+\frac{(y_0-4)(y-4)}{16}=1$, dosadíme $Y\left[0;\frac{36}{5}\right]$.

$$\frac{(0-3)(x-3)}{25}+\frac{\left(\frac{36}{5}-4\right)(y-4)}{16}=1$$

$$\frac{-3(x-3)}{25}+\frac{\frac{16}{5}(y-4)}{16}=1$$

$$\frac{-3(x-3)}{25}+\frac{(y-4)}{5}=1 \quad /\cdot 25$$

$$-3(x-3)+5(y-4)=25$$

$$-3x+9+5y-20=25$$

$$-3x+5y-36=0$$

$$3x-5y+36=0$$

Př. 3: Urči průsečíky přímky $x+y-1=0$ s elipsou $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. Jaká je jejich vzájemná poloha?

Řešíme soustavu rovnic: $\begin{array}{l} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \quad /\cdot 12 \\ x+y-1=0 \end{array}$.

$$\begin{array}{r} 3x^2+4y^2=12 \\ y=1-x \\ \hline \end{array}$$ (dosadíme do první rovnice)

$$3x^2+4(1-x)^2=12$$

$$3x^2+4\left(1-2x+x^2\right)=12$$

$$3x^2+4-8x+4x^2=12$$

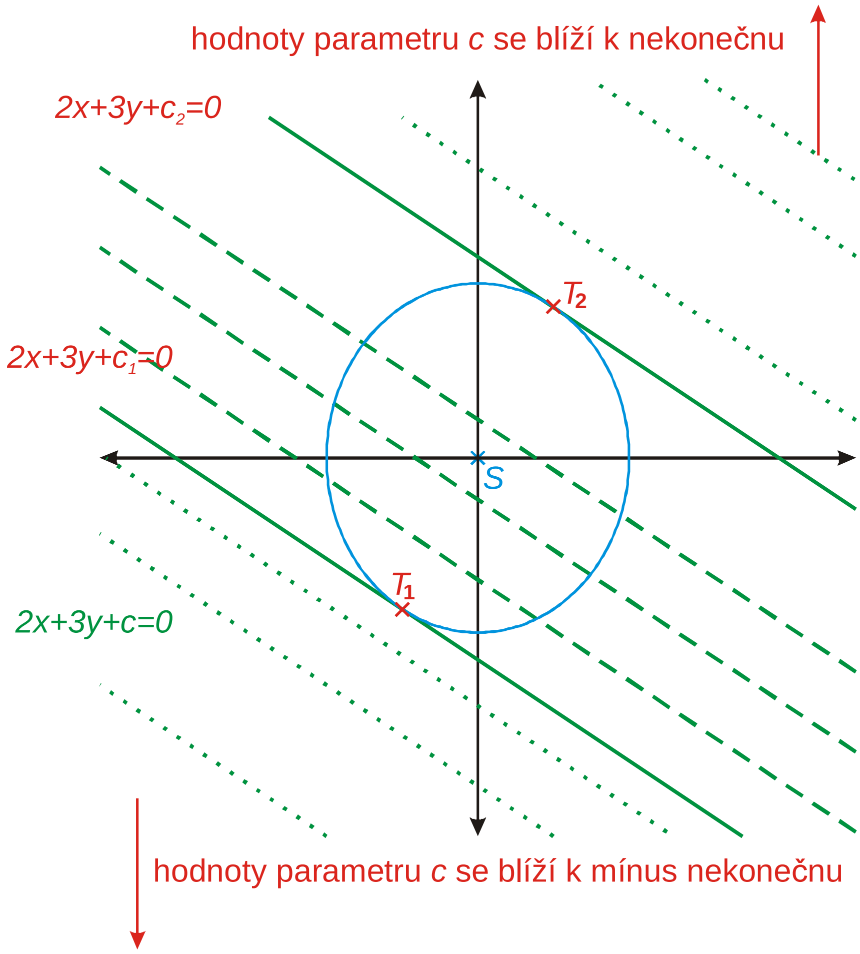
$$7x^2-8x-8=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 7\cdot(-8)}}{2\cdot 7}=\frac{8\pm 4\sqrt{18}}{2\cdot 7}=\frac{4\pm 6\sqrt{2}}{7}$$

- $x_1=\frac{4+6\sqrt{2}}{7} \Rightarrow y_1=1-x_1=1-\frac{4+6\sqrt{2}}{7}=\frac{3-6\sqrt{2}}{7}$
- $x_2=\frac{4-6\sqrt{2}}{7} \Rightarrow y_2=1-x_2=1-\frac{4-6\sqrt{2}}{7}=\frac{3+6\sqrt{2}}{7}$

Přímka $x+y-1=0$ má s elipsou $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ dva společné body $P_1\left[\frac{4+6\sqrt{2}}{7};\frac{3-6\sqrt{2}}{7}\right]$ a $P_2\left[\frac{4-6\sqrt{2}}{7};\frac{3+6\sqrt{2}}{7}\right]$ a je tedy její sečnou.

Př. 4: Urči jak závisí vzájemná poloha elipsy $4x^2+3y^2-16=0$ a přímky $2x+3y+c=0$ na hodnotě parametru c. Ještě než začneš příklad řešit početně, nakresli si náčrtek a co nejpřesněji odhadni, jak bude početní řešení příkladu vypadat.



Z obrázku vidíme, že stejně jako odpovídajícího příkladu s kružnicí nastanou celkem tři případy (postupně od nejmenších hodnot parametru c:

$c\in(-\infty;c_1)$ nebo $c\in(c_2;\infty)$: přímka se s elipsou neprotíná, je její vnější přímkou.

$c=c_1$ nebo $c=c_2$: přímka je tečnou elipsy.

$c\in(c_1;c_2)$: přímka protíná elipsu ve dvou bodech, je její sečnou.

Nyní řešíme příklad početně.

Hledáme průsečíky přímky s kružnicí $\Rightarrow$ body, které vyhovují oběma rovnicím $\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic
$$\begin{aligned}4x^2+3y^2-16&=0\\2x+3y+c&=0\end{aligned}$$
$\Rightarrow$ stejný postup jako v příkladě s kružnicí.

Trochu si usnadníme výpočet:
$$\begin{aligned}(2x)^2+3y^2-16&=0\\2x&=-3y-c\end{aligned}$$

Teď dosadíme z druhé rovnice do první rovnice rovnou za $2x$:

$(-3y-c)^2+3y^2-16=0$ (mínus se při umocňování ztratí)

$(3y+c)^2+3y^2-16=0$

$9y^2+6yc+c^2+3y^2-16=0$

$12y^2+6yc+c^2-16=0 \Rightarrow$ kvadratická rovnice s parametrem.

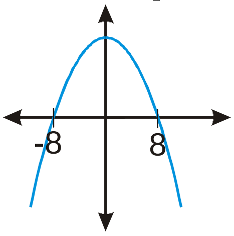
$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-6c\pm\sqrt{(6c)^2-4\cdot 12\cdot\left(c^2-16\right)}}{2\cdot 12}$$

$$y_{1,2}=\frac{-6c\pm\sqrt{36c^2-48\cdot c^2+48\cdot 16}}{24}=\frac{-6c\pm\sqrt{48\cdot 16-12c^2}}{24}$$

O existenci kořenů rozhoduje znaménko výrazu pod odmocninou
$\Rightarrow$ řešíme nerovnici $48\cdot 16-12c^2\geq 0 \quad /:12$.

$-\left(c^2-64\right)=-(c-8)(c+8)\geq 0$

„obrácená“ parabola, průsečíky pro $c=-8$ a $c=8$



Z obrázku je vidět, že mohou nastat tři možnosti:

1. $c\in(-8;8)$ $\Rightarrow$ diskriminant rovnice $D=64-c^2>0$

Rovnice pro nalezení průsečíků elipsy s přímkou má dva kořeny $\Rightarrow$ elipsa se protíná s přímkou ve dvou bodech, přímka je její sečnou.

2. $c=-8$ nebo $c=8$ $\Rightarrow$ diskriminant rovnice $D=64-c^2=0$
Rovnice pro nalezení průsečíků elipsy s přímkou má jeden kořen $\Rightarrow$ elipsa se protíná s přímkou v jednom bodě, přímka je její tečnou.
Tečné body můžeme spočítat:

- $c=8$ $\quad y_{1,2}=\dfrac{-6\cdot 8\pm 0}{24}=-2$ $\Rightarrow$ $2x=-3y-c=-3(-2)-8=-2\Rightarrow x=-1$
  $\Rightarrow$ $T_1[-1;-2]$
- $c=-8$ $\quad y_{1,2}=\dfrac{-6\cdot(-8)\pm 0}{24}=2$ $\Rightarrow$ $2x=-3y-c=-3(2)-(-8)=2\Rightarrow x=1$
  $\Rightarrow$ $T_2[1;2]$

3. $c\in(-\infty;-8)\cup(8;\infty)$ $\Rightarrow$ diskriminant rovnice $D=64-c^2<0$

Rovnice pro nalezení průsečíků elipsy s přímkou nemá žádný kořen $\Rightarrow$ elipsa se s přímkou neprotíná, přímka je její vnější přímkou.

Př. 5: Najdi tečny elipsy $5x^2+9y^2-45=0$ procházející bodem $A[0;-3]$.

Napíšeme si všechny přímky procházející bodem $A[0;-3]$:

$(y-y_0)=k(x-x_0)$ $\Rightarrow$ $(y+3)=kx$, přímku $x=0$ nemusíme sledovat, je určitě sečnou elipsy $5x^2+9y^2-45=0$.

Z rovnice přímky $(y+3)=kx$ vyjádříme $y=kx-3$ a dosadíme do rovnice elipsy:

$5x^2+9(kx-3)^2-45=0$

$5x^2+9\left(k^2x^2-6kx+9\right)-45=0$

$5x^2 + 9k^2x^2 - 54kx + 81 - 45 = 0$

$(5 + 9k^2)x^2 - 54kx + 36 = 0$

Hledáme tečny $\Rightarrow$ zajímáme se o nulový diskriminant, řešit zbytek kvadratické rovnice je zbytečné:

$D = b^2 - 4ac = (-54k)^2 - 4(5 + 9k^2)36 = 2916k^2 - 1296k^2 - 720 = 0$

$1620k^2 - 720 = 0$

$k^2 = \frac{720}{1620} = \frac{72}{162} = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}$

- $k_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow t_1 : y = \frac{2}{3}x - 3 \Rightarrow t_1 : 2x - 3y - 9 = 0$
- $k_2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow t_2 : y = -\frac{2}{3}x - 3 \Rightarrow t_2 : 2x + 3y + 9 = 0$

Př. 6: Petáková:
strana 130/cvičení 90 d)
strana 130/cvičení 92 a)
strana 130/cvičení 94 b)
strana 131/cvičení 95 b)
strana 130/cvičení 96 d)

Shrnutí: Vzorec pro rovnici tečny elipsy je analogický vzorci pro tečnu kružnice. Ostatní příklady řešíme stejně jako u kružnice bez využívání speciálních vlastností.