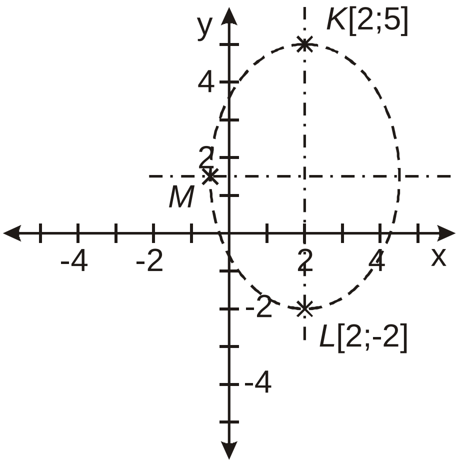
7.5.10 Hledání elips

Př. 1: Najdi rovnici elipsy, která má hlavní vrcholy v bodech $K[2;5]$, $L[2;-2]$ a vedlejší vrchol v bodě $M\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$.



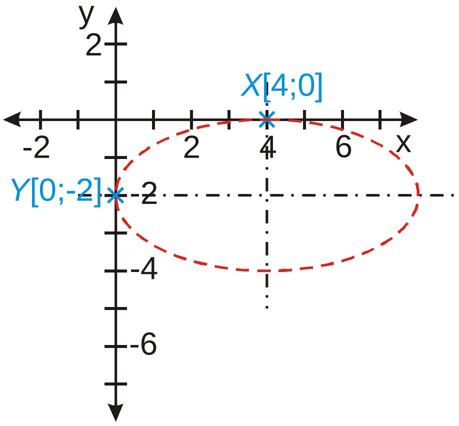
Jde o „stojatou" elipsu. Střed elipsy je středem úsečky $KL \Rightarrow S\left[\frac{2+2}{2};\frac{5+(-2)}{2}\right]=\left[2;\frac{3}{2}\right]$.

Hlavní poloosa: $b=|SK|=\frac{7}{2}$.

Vedlejší poloosa: $a=|SM|=\frac{5}{2}$.

Rovnice elipsy: $\frac{(x-2)^2}{\frac{25}{4}}+\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{49}{4}}=1$.

Př. 2: Napiš rovnici elipsy, která se dotýká osy x v bodě $X[4;0]$ a osy y v bodě $Y[0;-2]$.



Jde o „ležatou" elipsu. Body X a Y jsou jejími vrcholy. Střed elipsy má souřadnice $S[4;-2]$

Hlavní poloosa: $a=|SY|=4$

Vedlejší poloosa: $b=|SX|=2$

Rovnice elipsy: $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$

Př. 3: Najdi rovnici elipsy s ohnisky v bodech $E[-1;0]$ a $F[1;0]$, která prochází bodem $X\left[1;\frac{3}{2}\right]$. Urči délky jejích poloos a souřadnice jejich vrcholů.

$a^2=b^2+e^2=b^2+1^2=b^2+1$. $\qquad \frac{x^2}{b^2+1}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Dosadíme bod $X\left[1;\frac{3}{2}\right]$: $\frac{1^2}{b^2+1}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{b^2}=1 \qquad \frac{1}{b^2+1}+\frac{9}{4b^2}=1 \quad /(b^2+1)4b^2$

$4b^2+9(b^2+1)=(b^2+1)4b^2 \qquad 4b^4-9b^2-9=0 \qquad 4x^2-9x-9=0$

$x_1=\frac{9+15}{8}=3 \Rightarrow b^2=3 \qquad x_2=\frac{9-15}{8}=-\frac{3}{4} \Rightarrow b^2=-\frac{3}{4}$ (nesmysl)

$a^2=b^2+1=3+1=4$, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=2$, $b^2=3 \Rightarrow b=\sqrt{3}$.

$A[-2;0]$, $B[2;0]$, $C\left[0;-\sqrt{3}\right]$; $D\left[0;\sqrt{3}\right]$.

Dodatek: Daleko rychleji můžeme příklad spočítat dosazením bodů ze zadání do vztahu $|XF|+|XE|=2a$.

Př. 4: (BONUS) Ověř, že pro každý bod elipsy $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ z předchozího příkladu se součet jeho vzdáleností od ohnisek $E[-1;0]$ a $F[1;0]$ rovná 4.

Rovnice elipsy $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \Rightarrow a=2 \Rightarrow$ hlavní vrcholy $A[-2;0]$, $B[2;0] \Rightarrow x\in\langle -2;2\rangle$

$|XE|+|XF|=2a$. $\sqrt{(x-e_1)^2+(y-e_2)^2}+\sqrt{(x-f_1)^2+(y-f_2)^2}=2a$.

E a F: $\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=2a$. Vypočítáme y^2 z rovnice elipsy: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \Rightarrow$

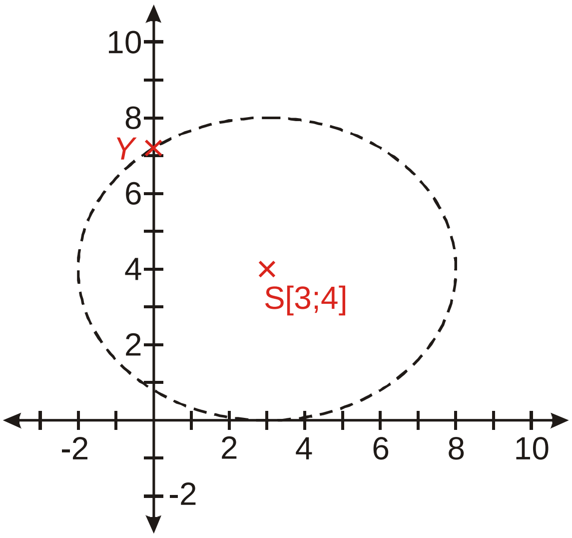
$3x^2+4y^2=12 \Rightarrow y^2=3-\frac{3}{4}x^2$. $\sqrt{x^2+2x+1+3-\frac{3}{4}x^2}+\sqrt{x^2-2x+1+3-\frac{3}{4}x^2}=2a$.

$\sqrt{\frac{x^2}{4}+2x+4}+\sqrt{\frac{x^2}{4}-2x+4}=\sqrt{\left(\frac{x}{2}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{x}{2}-2\right)^2}=\left|\frac{x}{2}+2\right|+\left|\frac{x}{2}-2\right|$

V intervalu $x\in\langle -2;2\rangle$ platí: $\left|\frac{x}{2}+2\right|=\frac{x}{2}+2$ $\qquad \left|\frac{x}{2}-2\right|=-\left(\frac{x}{2}-2\right)=2-\frac{x}{2}$

Dosadíme: $\left|\frac{x}{2}+2\right|+\left|\frac{x}{2}-2\right|=\frac{x}{2}+2+2-\frac{x}{2}=4=2a$.

Př. 5: Napiš rovnici elipsy, která má osy rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, střed v bodě $S[3;4]$, dotýká se osy x a osu y protíná v bodě $Y\left[0;\frac{36}{5}\right]$.



elipsa se osy x musí dotýkat v bodě $X[3;0]$,

$\Rightarrow b=|SX|=4$.

$\frac{(x-3)^2}{a^2}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$. dosadit bod $Y\left[0;\frac{36}{5}\right]$

$\frac{(0-3)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{36}{5}-4\right)^2}{16}=1 \quad /\cdot 16a^2$

$25\cdot 9+16a^2=25a^2 \qquad 25\cdot 9=9a^2 \qquad a^2=25$

Rovnice elipsy: $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{16}=1 \Rightarrow$

hlavní poloosa $a=5$.

Př. 6: Petáková:
strana 125/cvičení 27
strana 125/cvičení 30
strana 125/cvičení 31
strana 125/cvičení 33
strana 125/cvičení 38
strana 125/cvičení 40