

## 7.5.9 Obecná rovnice elipsy

**Př. 1:** Najdi střed, vrcholy a ohniska elipsy dané rovnicí  $(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 1$ .

$$\frac{(x-2)^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{\frac{1}{4}} = 1. \text{ Z rovnice víme: } S[2; -1], a = 1, b = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{„ležatá“ elipsa}$$

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, A[3; -1], B[1; -1], C[2; -0,5], D[2; -1,5].$$

$$E\left[2 + \frac{\sqrt{3}}{2}; -1\right], F\left[2 - \frac{\sqrt{3}}{2}; -1\right].$$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \quad / \cdot a^2 b^2.$$

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - 2b^2 mx - 2a^2 ny + m^2 b^2 + n^2 a^2 - a^2 b^2 = 0$$

$$px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0 \quad \text{- obecná rovnice elipsy}$$

**Př. 2:** U elipsy dané rovnicí  $4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$  najdi střed a urči velikosti poloos.

$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 4x^2 - 8x + y^2 + 4y + 4 = 0$$

$$4(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + (y + 2)^2 - 2^2 + 4 = 0 \quad 4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$$

$$(x-1)^2 + \frac{(y+2)^2}{4} = 1 \quad \text{můžeme psát i jako: } \frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

Elipsa má střed v bodě  $S[1; -2]$ , hlavní poloosa je  $b = 2$ , vedlejší poloosa je  $a = 1$ .

**Př. 3:** Úpravou na středový tvar rozhodni, které z uvedených rovnic jsou rovnicí elipsy. U všech nalezených elips urči poloosy, střed (v případě dostatku času i souřadnice vrcholů a ohnisek).

a)  $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0$

b)  $x^2 + 4y^2 + 6x - 16y + 16 = 0$

c)  $9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y + 14 = 0$

d)  $25x^2 + 16y^2 - 100x + 32y + 115 = 0$

e)  $4x^2 + 12x + 3y^2 = 0$

a)  $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0$

$$4(x^2 + 4x) + 9(y^2 - 2y) - 11 = 0$$

$$4(x^2 + 2x \cdot 2 + 2^2 - 2^2) + 9(y^2 - 2y + 1^2 - 1^2) - 11 = 0 \quad 4(x+2)^2 + 9(y-1)^2 = 36 \quad / : 36$$

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \Rightarrow \text{„ležatá“ elipsa. } S[-2; 1], a = 3, b = 2,$$

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

$$A[1; 1], B[-5; 1], C[-2; 3]; D[-2; -1], F[-2 + \sqrt{5}; 1], E[-2 - \sqrt{5}; 1].$$

b)  $x^2 + 4y^2 + 6x - 16y + 16 = 0$

$$x^2 + 2x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 4(y^2 - 4y) + 16 = 0$$

$$(x+3)^2 - 3^2 + 4(y^2 - 2y \cdot 2 + 2^2 - 2^2) + 16 = 0 \quad (x+3)^2 - 3^2 + 4(y-2)^2 - 4 \cdot 2^2 + 16 = 0$$

$$(x+3)^2 + 4(y-2)^2 = 9 \quad /:9 \quad \frac{(x+3)^2}{9} + 4 \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \quad \frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{\frac{9}{4}} = 1 \Rightarrow$$

$$S[-3;2], a=3, b=\frac{3}{2}, e=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

$$A[0;2], B[-6;2], C\left[-3;\frac{7}{2}\right]; D\left[-3;\frac{1}{2}\right], F\left[-3+\frac{3}{2}\sqrt{3};2\right], E\left[-3+\frac{3}{2}\sqrt{3};2\right].$$

c)  $9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y + 14 = 0 \quad 9(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 4(y^2 - 2y + 1^2 - 1^2) + 14 = 0$   
 $9(x-1)^2 - 9 \cdot 1 + 4(y-1)^2 - 4 \cdot 1 + 14 = 0 \quad 9(x-1)^2 + 4(y-1)^2 = -1 \Rightarrow$  Nejde o rovnici elipsy, této rovnici nevyhovuje žádný bod roviny.

d)  $25x^2 + 16y^2 - 100x + 32y + 115 = 0 \quad 25(x^2 - 4x) + 16(y^2 + 2y) + 115 = 0$   
 $25(x^2 - 2x \cdot 2 + 2^2 - 2^2) + 16(y^2 + 2y + 1^2 - 1^2) + 115 = 0$   
 $25(x-2)^2 - 25 \cdot 2^2 + 16(y+1)^2 - 16 \cdot 1^2 + 115 = 0$   
 $25(x-2)^2 + 16(y+1)^2 = 1$  Nemůžeme dělit (musíme čísla převést do jmenovatelů).

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{25}} + \frac{(y+1)^2}{\frac{1}{16}} = 1 \Rightarrow S[2;-1], a=\frac{1}{5}, b=\frac{1}{4}, e=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{400}} = \frac{3}{20}.$$

$$C\left[2;-\frac{3}{4}\right]; D\left[2;-\frac{5}{4}\right], A\left[\frac{11}{5};-1\right], B\left[\frac{9}{5};-1\right], F\left[2;-\frac{17}{20}\right], E\left[2;-\frac{23}{20}\right].$$

e)  $x^2 + 3x + 3y^2 = 0 \quad x^2 + 2x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3y^2 = 0$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 3y^2 = \frac{9}{4} \quad /: \frac{9}{4} \quad \frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1 \Rightarrow \text{„ležatá“ elipsa.}$$

$$S\left[\frac{3}{2};0\right], a=\frac{3}{2}, b=\frac{\sqrt{3}}{2}, e=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$A[3;0], B[0;0], C\left[\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]; D\left[\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right], F\left[\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2};0\right], E\left[\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2};0\right].$$

**Př. 4:** Petáková:  
strana 128/cvičení 75 b) d) e) f)