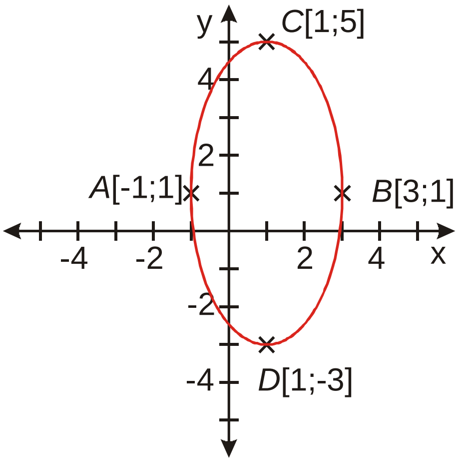
7.5.8 Středová rovnice elipsy

Př. 1: Vrcholy elipsy leží v bodech $A[-1;1]$, $B[3;1]$, $C[1;5]$, $D[1;-3]$. Urči parametry elipsy a souřadnice jejích ohnisek.



Střed elipsy = střed úsečky AB: $S\left[\frac{-1+3}{2};\frac{1+1}{2}\right]=[1;1]$.

Vodorovná poloosa (nyní vedlejší) $a=|SA|=2$.

Svislá poloosa (nyní hlavní) $b=|SC|=4$.

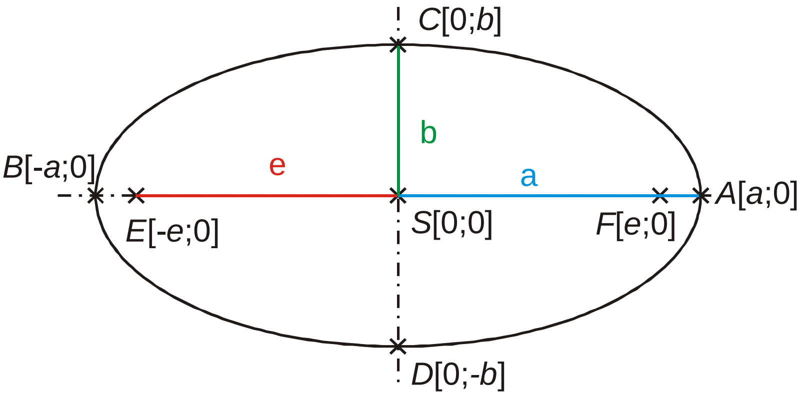
Výstřednost:

$b^2=a^2+e^2 \Rightarrow e=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

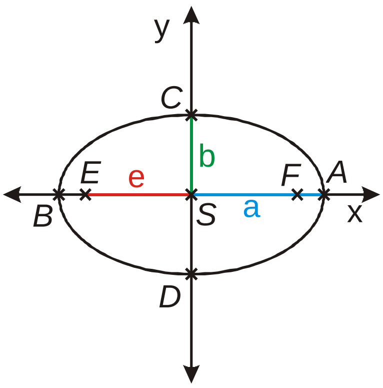
Ohniska (posunutá od středu o e ve svislém směru)

$F\left[1-2\sqrt{3};1\right]$, $E\left[1+2\sqrt{3};1\right]$.

Př. 2: Je dána elipsa se středem v počátku soustavy souřadnic, hlavní poloosou a, vedlejší poloosou b a výstředností e. Urči souřadnice jejích ohnisek a vrcholů. Na základě rovnosti z definice elipsy, poznatků o vzájemných vztazích parametrů a, b, e odvoď rovnici této elipsy.

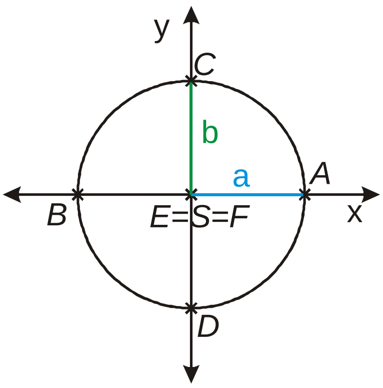


$A[a;0]$, $B[-a;0]$, $C[0;b]$; $D[0;-b]$., $F[e;0]$, $E[-e;0]$.



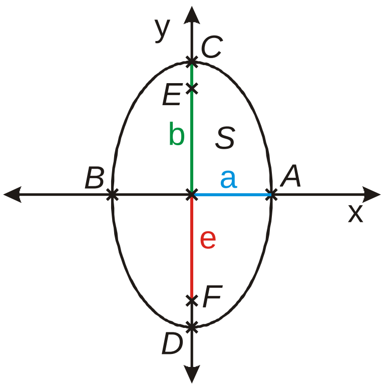
$a>b \Rightarrow e^2=a^2-b^2$

„ležatá" elipsa



$a=b$

kružnice $x^2+y^2=a^2$



$a<b \Rightarrow e^2=b^2-a^2$

„stojatá" elipsa

- **Dohoda o značení:**

Př. 3: Elipsa je dána rovnicí $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. Urči její typ, poloosy, výstřednost, vrcholy a ohniska.

Z rovnice vidíme: $a^2=4 \Rightarrow a=2$, $b^2=9 \Rightarrow b=3$ $\Rightarrow$ jde o „stojatou“ elipsu.
Výstřednost: $b^2=a^2+e^2 \Rightarrow e=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$.
$S[0;0]$, $A[2;0]$, $B[-2;0]$, $C[0;3]$; $D[0;-3]$, $F\left[0;\sqrt{5}\right]$, $E\left[0;-\sqrt{5}\right]$.

- $x^2+y^2=9$ $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ $\Rightarrow$ kružnice se středem v bodě $S[2;-1]$.

Př. 4: Napiš rovnici elipsy, která je shodná s elipsou $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ a jejíž střed leží v bodě $[2;-1]$.

Podle analogie s rovnicí kružnice půjde zřejmě o rovnici $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$.

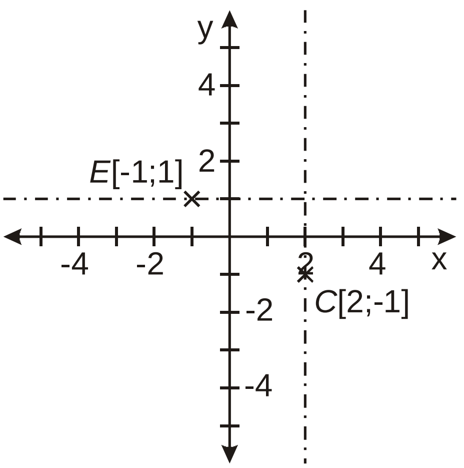
Př. 5: Napiš rovnici elipsy se středem v bodě $S[m;n]$ s hlavní poloosou *a* a vedlejší poloosou *b*.

Podle předchozího příkladu jde zřejmě o rovnici $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$.

Př. 6: Najdi střed, vrcholy a ohniska elipsy dané rovnicí $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$.

$S[2;-1]$, $a=4$, $b=5$, $e=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$, $C[2;4]$, $D[2;-6]$, $A[6;-1]$, $B[-2;-1]$.
Ohniska: $E[2;2]$, $F[2;-4]$.

Př. 7: Napiš středovou rovnici elipsy, jejíž osy jsou rovnoběžné se souřadnými osami, pokud znáš souřadnice vedlejšího vrcholu $C[2;-1]$ a jednoho ohniska $E[-1;1]$.



$S[2;1]$, $e=|SE|=3$, $b=|SC|=2$, $a^2=b^2+e^2 \Rightarrow a=\sqrt{b^2+e^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$.

Rovnice elipsy: $\frac{(x-2)^2}{13}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$.