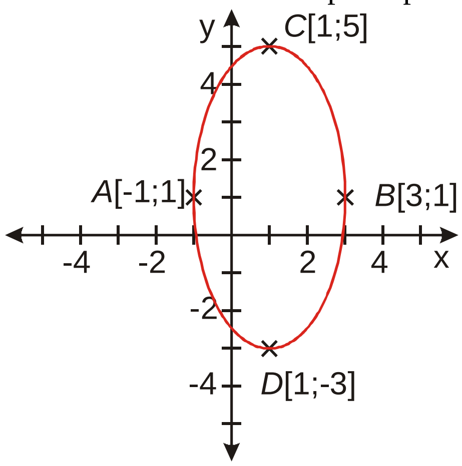
7.5.8 Středová rovnice elipsy

Předpoklady: 7501, 7507

Př. 1: Vrcholy elipsy leží v bodech $A[-1;1]$, $B[3;1]$, $C[1;5]$, $D[1;-3]$. Urči parametry elipsy a souřadnice jejích ohnisek.

Zadané souřadnice už na první pohled vypadají podezřele, nakreslíme si obrázek:



$\Rightarrow$ elipsa je svisle orientovaná $\Rightarrow$ ohniska neleží na přímce *AB* ale na přímce *CD*.

Střed elipsy = střed úsečky *AB*: $S\left[\frac{-1+3}{2};\frac{1+1}{2}\right]=[1;1]$.

Vodorovná poloosa (nyní vedlejší) $a=|SA|=2$.

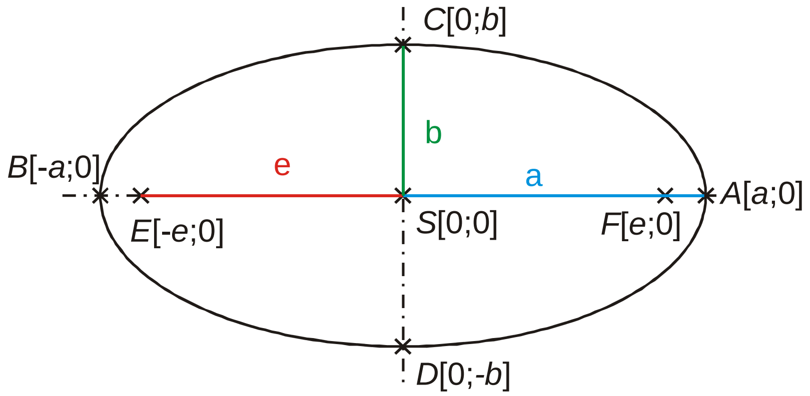
Svislá poloosa (nyní hlavní) $b=|SC|=4$.

Výstřednost: $b^2=a^2+e^2 \Rightarrow e=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

Ohniska (posunutá od středu o *e* ve svislém směru) $F\left[1-2\sqrt{3};1\right]$, $E\left[1+2\sqrt{3};1\right]$.

Př. 2: Je dána elipsa se středem v počátku soustavy souřadnic, hlavní poloosou *a*, vedlejší poloosou *b* a výstředností *e*. Urči souřadnice jejích ohnisek a vrcholů. Na základě rovnosti z definice elipsy, poznatků o vzájemných vztazích parametrů *a*, *b*, *e* odvoď rovnici této elipsy.

Stejný příklad jako předchozí, jenom máme písmenka místo čísel.
Střed elipsy je v počátku $\Rightarrow$ $S[0;0]$.



Hlavní vrcholy (posunuté od středu o a ve vodorovném směru): $A[a;0]$, $B[-a;0]$.
Vedlejší vrcholy (posunuté od středu o b ve svislém směru): $C[0;b]$; $D[0;-b]$.
Ohniska (posunutá od středu o e ve vodorovném směru): $F[e;0]$, $E[-e;0]$.
Bod $X[x;y]$ leží na elipse, pokud vyhovuje podmínce $|XE|+|XF|=2a$.
Dosadíme do rovnice: $\sqrt{(x-e_1)^2+(y-e_2)^2}+\sqrt{(x-f_1)^2+(y-f_2)^2}=2a$.
Dosadíme souřadnice bodů $E[-e;0]$ a $F[e;0]$:

$$\sqrt{(x-(-e))^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-e)^2+(y-0)^2}=2a.$$

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}+\sqrt{(x-e)^2+y^2}=2a \qquad /^2$$

$$(x+e)^2+y^2+2\sqrt{(x+e)^2+y^2}\sqrt{(x-e)^2+y^2}+(x-e)^2+y^2=4a^2$$

$$x^2+2ex+e^2+y^2+2\sqrt{(x+e)^2+y^2}\sqrt{(x-e)^2+y^2}+x^2-2ex+e^2+y^2=4a^2$$

$$2\sqrt{(x+e)^2+y^2}\sqrt{(x-e)^2+y^2}+2\left(x^2+e^2+y^2\right)=4a^2 \qquad /:2$$

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}\sqrt{(x-e)^2+y^2}=2a^2-\left(x^2+e^2+y^2\right) \qquad /^2$$

$$\left[(x+e)^2+y^2\right]\left[(x-e)^2+y^2\right]=\left[2a^2-\left(x^2+e^2+y^2\right)\right]^2$$

$$(x+e)^2(x-e)^2+y^2(x+e)^2+y^2(x-e)^2+y^4=4a^4-2\cdot 2a^2\left(x^2+e^2+y^2\right)+\left(x^2+e^2+y^2\right)^2$$

Přestává to být únosné, necháme se radši podat, rovnici je možné upravit do tvaru:

$$\left(a^2-e^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-e^2\right) \qquad \text{použijeme } a^2-e^2=b^2$$

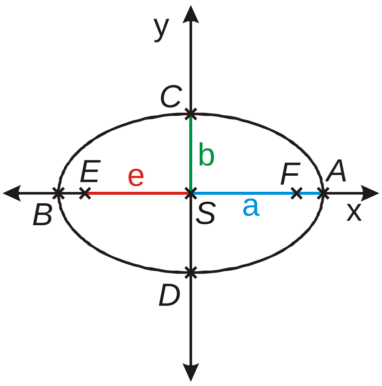
$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \qquad /:a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{(rovnice elipsy)}$$

Zbývá dokázat, že získaná rovnice je ekvivalentní s původní rovnicí. Tomu se vyhneme stejně, jako jsme se vyhnuli upravování rovnice, a spolehneme se na práci jiných, kteří to dokázali před námi.

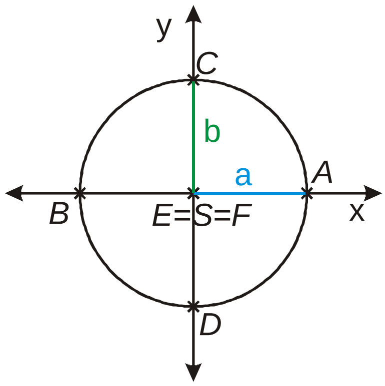
Elipsa, jejíž osy jsou shodné s osami soustavy souřadnic (a jejíž střed tedy leží v počátku soustavy souřadnic), je popsána rovnicí $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Podle vzájemné velikost parametrů a, b mohou nastat tři možnosti:



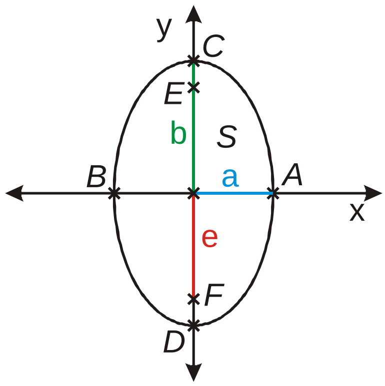
$a > b \Rightarrow \; e^2 = a^2 - b^2$

„ležatá“ elipsa



$a = b$

kružnice $x^2 + y^2 = a^2$



$a < b \Rightarrow e^2 = b^2 - a^2$

„stojatá“ elipsa

Dohoda o značení: Existují různé způsoby značení poloos a vrcholů elips. Neexistuje žádný matematický důvod, proč by se mohl používat pouze jeden z nich.

- My budeme dodržovat nepsanou úmluvu v gymnaziální sadě matematických učebnic. Písmenem *a* značíme vodorovnou poloosu (bez ohledu na to, zda je hlavní nebo vedlejší), písmenem *b* značíme svislou poloosu (opět bez ohledu na to, zda je hlavní nebo vedlejší). Stejně tak písmena *A*, *B* používáme pro vrcholy na vodorovné ose a písmena *C*, *D* pro vrcholy na svislé ose (opět bez ohledu na to, zda jsou hlavní nebo vedlejší). Označení tedy vážeme na souřadnici (směr), ne na význam.
- V Petákové se používá opačný přístup, kdy písmena *A*, *B* patří vždy hlavním vrcholům bez ohledu na orientaci elipsy. Podobně je hlavní poloosa vždy značena jako *a*, bez ohledu na její orientaci (zda je svislá nebo vodorovná).

Ani jeden z přístupů nijak neovlivňuje výsledky příkladů, jde vždy o to správně rozhodnout, jaký význam body v konkrétní situaci mají. Jejich pojmenování sice usnadňuje orientaci, ale podstatu problému nemění.
Už vůbec pak v textu netrvám na tom, aby vrchol *C* ležel na horní hranici elipsy.

Př. 3: Elipsa je dána rovnicí $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Urči její typ, poloosy, výstřednost, vrcholy a ohniska.

Z rovnice vidíme: $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$, $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$ $\Rightarrow$ jde o „stojatou“ elipsu.
Výstřednost: $b^2 = a^2 + e^2 \Rightarrow e = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.
Střed v počátku $S[0;0]$.
Vedlejší vrcholy (posunuté od středu o *a* ve vodorovném směru): $A[2;0]$, $B[-2;0]$.
Hlavní vrcholy (posunuté od středu o *b* ve svislém směru): $C[0;3]$; $D[0;-3]$.
Ohniska (posunutá od středu o *e* ve svislém směru): $F\left[0;\sqrt{5}\right]$, $E\left[0;-\sqrt{5}\right]$.

Zatím známe pouze rovnici elipsy se středem v počátku soustavy souřadnic.
Vzpomínka na kružnice:

- $x^2 + y^2 = 9 \;\Rightarrow$ kružnice se středem v počátku.
- $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9 \;\Rightarrow$ kružnice se středem v bodě $S[2;-1]$.

Př. 4: Napiš rovnici elipsy, která je shodná s elipsou $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ a jejíž střed leží v bodě $[2;-1]$.

Podle analogie s rovnicí kružnice půjde zřejmě o rovnici $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$.

Př. 5: Napiš rovnici elipsy se středem v bodě $S[m;n]$ s hlavní poloosou *a* a vedlejší poloosou *b*.

Podle předchozího příkladu jde zřejmě o rovnici $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$.

Elipsa, jejíž osy jsou rovnoběžné s osami soustavy souřadnic a jejíž střed leží v bodě $S[m;n]$ je popsána rovnicí $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$.
Rovnici budeme podobně jako u kružnice říkat středová.

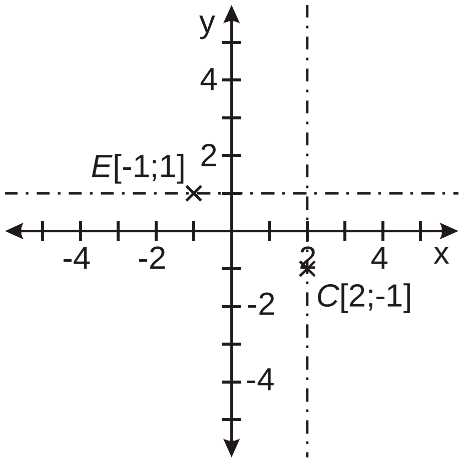
Poznámka: Pozornější si určitě všimli, že rovnice, které máme k dispozici, popisují pouze elipsy, jejichž osy jsou rovnoběžné se souřadnými osami. Rovnice elipsy, která je natočená, je podstatně složitější a proto se jí nezabýváme.

Př. 6: Najdi střed, vrcholy a ohniska elipsy dané rovnicí $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$.

Z rovnice víme: $S[2;-1]$, $a=4$, $b=5$ $\Rightarrow$ „stojatá“ elipsa.
Excentricita: $e=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.
Hlavní vrcholy: $C[2;4]$, $D[2;-6]$.
Vedlejší vrcholy: $A[6;-1]$, $B[-2;-1]$.
Ohniska: $E[2;2]$, $F[2;-4]$.

Př. 7: Napiš středovou rovnici elipsy, jejíž osy jsou rovnoběžné se souřadnými osami, pokud znáš souřadnice vedlejšího vrcholu $C[2;-1]$ a jednoho ohniska $E[-1;1]$.

Nakreslíme si obrázek:



Osy elipsy jsou rovnoběžné se souřadnými osami $\Rightarrow$ vedlejší osa prochází bodem C a je svislá $\Rightarrow$ hlavní osa musí být vodorovná přímka procházející ohniskem.

Průsečík os je středem elipsy $\Rightarrow$ $S[2;1]$.

Výstřednost elipsy: $e = |SE| = 3$.

Vedlejší poloosa: $b = |SC| = 2$.

Hlavní poloosa: $a^2 = b^2 + e^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + e^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

Rovnice elipsy: $\dfrac{(x-2)^2}{13} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$.

Shrnutí: Středová rovnice elipsy je podobná středové rovnici kružnice.