## 7.5.6 Tečny kružnic II

**Př. 1:** Je dána kružnice $k\left([1;1];\sqrt{10}\right)$ a bod $P[5;-1]$. Rozhodni, zda bod $P$ leží uvnitř, vně nebo na kružnici $k$. Pokud existují, najdi tečny kružnice procházející bodem $P$.

$|PS|=\sqrt{(p_1-s_1)^2+(p_2-s_2)^2}=\sqrt{(5-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{20}$ $\Rightarrow$ bod $P$ leží vně kružnice $\Rightarrow$

Přímky procházejí bodem $P[5;-1]$: $(y+1)=k(x-5)$ $\Rightarrow$ $y=kx-5k-1$ + $x=5$.

$(x-1)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(kx-5k-1-1)^2=10$. $\qquad (x-1)^2+(kx-5k-2)^2=10$

$x^2-2x+1+k^2x^2-5k^2x-2kx-5k^2x+25k^2+10k-2kx+10k+4=10$

$(1+k^2)x^2-2(5k^2+2k+1)x+5(5k^2+4k-1)=0$

$D=b^2-4ac=\left[-2(5k^2+2k+1)\right]^2-4(1+k^2)\cdot 5(5k^2+4k-1)=0$

$=4(25k^4+10k^3+5k^2+10k^3+4k^2+2k+5k^2+2k+1)-20(5k^2+4k-1+5k^4+4k^3-k^2)=$

$=4(25k^4+20k^3+14k^2+4k+1)-20(5k^4+4k^3+4k^2+4k-1)=$

$=100k^4+80k^3+56k^2+16k+4-100k^4-80k^3-80k^2-80k+20=$

$=-24k^2-64k+24=0$

$=3k^2+8k-3=0$

$$k_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 3\cdot(-3)}}{2\cdot 3}=\frac{-8\pm 10}{6}$$

- $k_1=\dfrac{-8-10}{6}=-3$ $\quad\Rightarrow$ Tečna $(y+1)=-3(x-5)$ $\Rightarrow$ $3x+y-14=0$
- $k_2=\dfrac{-8+10}{6}=\dfrac{1}{3}$ $\quad\Rightarrow$ Tečna $(y+1)=\dfrac{1}{3}(x-5)$ $\Rightarrow$ $x-3y-8=0$

Z bodu $P[5;-1]$ je možné vést ke kružnici $k\left([1;1];\sqrt{10}\right)$ dvě tečny: $3x+y-14=0$ a $x-3y-8=0$.

Opět předeme na jiné značení. Je dána kružnice $k([m;n];r)$ a bod $X_1[x_1;y_1]$.

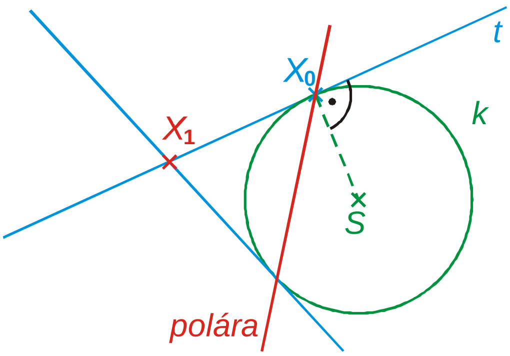
Bod $X_1$ leží na tečně ke kružnici $k$ procházející bodem $X_0$. Rovnici této přímky jsme odvodili minulou hodinu $\Rightarrow$ bod $X_1$ leží na přímce $(x_0-m)(x-m)+(y_0-n)(y-n)=r^2$

$\Rightarrow$ rovnice musí vyjít, pokud do ní dosadíme bod $X_1[x_1;y_1]$ $\Rightarrow$

$(x_0-m)(x_1-m)+(y_0-n)(y_1-n)=r^2$ - toto není rovnice přímky, ale rovnost dvou konkrétních čísel, neobsahující žádnou proměnou.

místo $X_0[x_0;y_0]$ napíšeme neznámé $x$, $y$: $(x-m)(x_1-m)+(y-n)(y_1-n)=r^2$.

**polára bodu $X_1$ vzhledem ke kružnici $k$.**



**Př. 2:** Je dána kružnice $k\left([1;1];\sqrt{10}\right)$ a bod $P[5;-1]$. Najdi tečny kružnice $k$ procházející bodem $P$ pomocí rovnice poláry a rovnice tečny.

**Hledání poláry** $(x-1)(5-1)+(y-1)(-1-1)=10$

$4(x-1)-2(y-1)=10 \qquad 4x-2y-12=0 \qquad 2x-y-6=0$

**Průsečíky poláry s kružnicí (tečné body)**

$2x-y-6=0 \;\Rightarrow\; y=2x-6 .\; (x-1)^2+(2x-7)^2=x^2-2x+1+4x^2-28x+49=10$

$5x^2-30x+40=0 \qquad x^2-6x+8=0 \qquad (x-4)(x-2)=0$

**Dopočítání druhé souřadnice tečných bodů a odpovídající tečny**

- $x_1=4 \;\Rightarrow\; y_1=2x_1-6=2\cdot 4-6=2 \;\Rightarrow$ tečný bod $T_1[4;2]$.

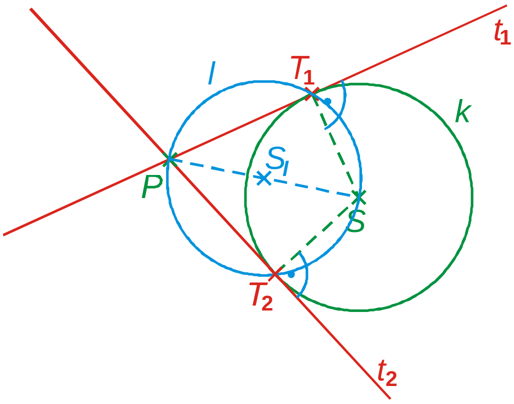
  Rovnice tečny kružnice $k$ v tomto bodě: $(x-1)(4-1)+(y-1)(2-1)=10$.

  $3(x-1)+(y-1)=10 \qquad 3x+y-14=0$
- $x_2=2 \;\Rightarrow\; y_1=2x_1-6=2\cdot 2-6=-2 \;\Rightarrow$ tečný bod $T_2[2;-2]$.

  Rovnice tečny kružnice $k$ v tomto bodě: $(x-1)(2-1)+(y-1)(-2-1)=10$.

  $(x-1)-3(y-1)=10 \qquad x-3y-8=0$

**Př. 3:** Je dána kružnice $k\left([1;1];\sqrt{10}\right)$ a bod $P[5;-1]$. Najdi tečny kružnice $k$ procházející bodem $P$. Při řešení využij úhly, které svírá tečna se spojnicí tečného bodu a středu kružnice.




Střed kružnice $l$ = střed úsečky $PS$ $\Rightarrow$ $S_l=S_{PS}\left[\frac{5+1}{2};\frac{-1+1}{2}\right]=[3;0]$.

Poloměr kružnice $l$: $r_l=\frac{|PS|}{2}=\frac{\sqrt{(p_1-s_1)^2+(p_2-s_2)^2}}{2}=\frac{\sqrt{(5-1)^2+(-1-1)^2}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$.

$l\left([3;0];\sqrt{5}\right)$: $(x-3)^2+y^2=5 \qquad k\left([1;1];\sqrt{10}\right)$: $(x-1)^2+(y-1)^2=10$.

$$x^2-6x+9+y^2=5$$
$$x^2-2x+1+y^2-2y+1=10$$

$$x^2+y^2-6x=-4$$
$$[\![1]\!]-[\![2]\!] \qquad -4x+2y=-12 \;\Rightarrow y=2x-6$$

$x^2+y^2-6x=x^2+(2x-6)^2-6x=-4$

$x^2+4x^2-24x+36-6x=-4$

$5x^2-30x+40=0$