

7.5.6 Tečny kružnic II

Př. 1: Je dána kružnice $k([1;1];\sqrt{10})$ a bod $P[5;-1]$. Rozhodni, zda bod P leží uvnitř, vně nebo na kružnici k . Pokud existují, najdi tečny kružnice procházející bodem P .

$$|PS| = \sqrt{(p_1 - s_1)^2 + (p_2 - s_2)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{20} \Rightarrow \text{bod } P \text{ leží vně kružnice} \Rightarrow$$

Přímky procházejí bodem $P[5;-1]$: $(y+1) = k(x-5) \Rightarrow y = kx - 5k - 1 + x = 5$.

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + (kx-5k-1-1)^2 = 10. \quad (x-1)^2 + (kx-5k-2)^2 = 10$$

$$x^2 - 2x + 1 + k^2x^2 - 5k^2x - 2kx - 5k^2x + 25k^2 + 10k - 2kx + 10k + 4 = 10$$

$$(1+k^2)x^2 - 2(5k^2+2k+1)x + 5(5k^2+4k-1) = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = [-2(5k^2+2k+1)]^2 - 4(1+k^2) \cdot 5(5k^2+4k-1) = 0$$

$$= 4(25k^4 + 10k^3 + 5k^2 + 10k^3 + 4k^2 + 2k + 5k^2 + 2k + 1) - 20(5k^2 + 4k - 1 + 5k^4 + 4k^3 - k^2) =$$

$$= 4(25k^4 + 20k^3 + 14k^2 + 4k + 1) - 20(5k^4 + 4k^3 + 4k^2 + 4k - 1) =$$

$$= 100k^4 + 80k^3 + 56k^2 + 16k + 4 - 100k^4 - 80k^3 - 80k^2 - 80k + 20 =$$

$$= -24k^2 - 64k + 24 = 0$$

$$= 3k^2 + 8k - 3 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{2 \cdot 3} = \frac{-8 \pm 10}{6}$$

$$\bullet k_1 = \frac{-8-10}{6} = -3 \Rightarrow \text{Tečna } (y+1) = -3(x-5) \Rightarrow 3x + y - 14 = 0$$

$$\bullet k_2 = \frac{-8+10}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{Tečna } (y+1) = \frac{1}{3}(x-5) \Rightarrow x - 3y - 8 = 0$$

Z bodu $P[5;-1]$ je možné vést ke kružnici $k([1;1];\sqrt{10})$ dvě tečny: $3x + y - 14 = 0$ a $x - 3y - 8 = 0$.

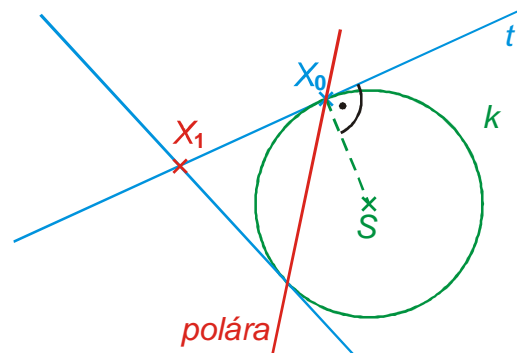
Opět předeme na jiné značení. Je dána kružnice $k([m;n];r)$ a bod $X_1[x_1;y_1]$.

Bod X_1 leží na tečně ke kružnici k procházející bodem X_0 . Rovnici této přímky jsme odvodili minulou hodinu \Rightarrow bod X_1 leží na přímce $(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2$
 \Rightarrow rovnice musí vyjít, pokud do ní dosadíme bod $X_1[x_1;y_1] \Rightarrow$

$(x_0 - m)(x_1 - m) + (y_0 - n)(y_1 - n) = r^2$ - toto není rovnice přímky, ale rovnost dvou konkrétních čísel, neobsahující žádnou proměnou.

místo $X_0[x_0;y_0]$ napíšeme neznámé x, y : $(x - m)(x_1 - m) + (y - n)(y_1 - n) = r^2$.

polára bodu X_1 vzhledem ke kružnici k .



Př. 2: Je dána kružnice $k([1;1];\sqrt{10})$ a bod $P[5;-1]$. Najdi tečny kružnice k procházející bodem P pomocí rovnice poláry a rovnice tečny.

Hledání poláry $(x-1)(5-1)+(y-1)(-1-1)=10$

$$4(x-1)-2(y-1)=10 \quad 4x-2y-12=0 \quad 2x-y-6=0$$

Průsečíky poláry s kružnicí (tečné body)

$$2x-y-6=0 \Rightarrow y=2x-6. (x-1)^2+(2x-7)^2=x^2-2x+1+4x^2-28x+49=10$$

$$5x^2-30x+40=0 \quad x^2-6x+8=0 \quad (x-4)(x-2)=0$$

Dopočítání druhé souřadnice tečných bodů a odpovídající tečny

- $x_1=4 \Rightarrow y_1=2x_1-6=2 \cdot 4-6=2 \Rightarrow$ tečný bod $T_1[4;2]$.

Rovnice tečny kružnice k v tomto bodě: $(x-1)(4-1)+(y-1)(2-1)=10$.

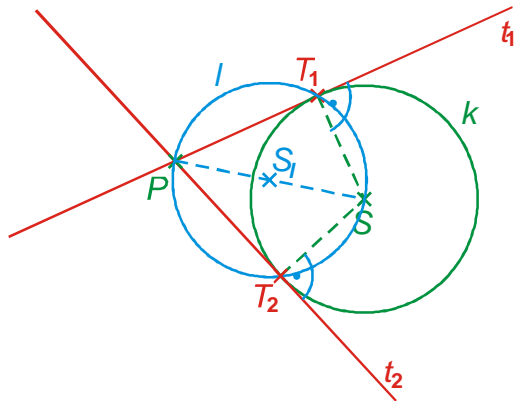
$$3(x-1)+(y-1)=10 \quad 3x+y-14=0$$

- $x_2=2 \Rightarrow y_1=2x_1-6=2 \cdot 2-6=-2 \Rightarrow$ tečný bod $T_2[2;-2]$.

Rovnice tečny kružnice k v tomto bodě: $(x-1)(2-1)+(y-1)(-2-1)=10$.

$$(x-1)-3(y-1)=10 \quad x-3y-8=0$$

Př. 3: Je dána kružnice $k([1;1];\sqrt{10})$ a bod $P[5;-1]$. Najdi tečny kružnice k procházející bodem P . Při řešení využij úhly, které svírá tečna se spojnicí tečného bodu a středu kružnice.



Střed kružnice $l =$ střed úsečky $PS \Rightarrow S_l = S_{PS} \left[\frac{5+1}{2}; \frac{-1+1}{2} \right] = [3;0]$.

Poloměr kružnice $l: r_1 = \frac{|PS|}{2} = \frac{\sqrt{(p_1-s_1)^2+(p_2-s_2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{(5-1)^2+(-1-1)^2}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$.

$$l([3;0];\sqrt{5}): (x-3)^2+y^2=5 \quad k([1;1];\sqrt{10}): (x-1)^2+(y-1)^2=10.$$

$$x^2-6x+9+y^2=5$$

$$x^2-2x+1+y^2-2y+1=10$$

$$\hline x^2+y^2-6x=-4$$

$$[1]-[2] \quad -4x+2y=-12 \Rightarrow y=2x-6$$

$$x^2+y^2-6x=x^2+(2x-6)^2-6x=-4$$

$$x^2+4x^2-24x+36-6x=-4$$

$$5x^2-30x+40=0$$