7.5.6 Tečny kružnic II

Předpoklady: 4501, 4504

Pedagogická poznámka: Tato hodina patří na gymnázium mezi početně nejnáročnější. Ačkoliv jsou příklady optimalizované na co nejmenší početní obtížnost, všichni studenti nedokáží dopočítat kompletní obsah celé hodiny. Provádíme kontroly v po částech příkladů, pokud někdo nestíhá, trvám na tom, aby nejhorší úseky neopisoval a vynechával si místo v sešitě, aby mu zbyl čas na úseky, které mají význam z hlediska pochopení smyslu příkladů.
Přesto všechno to nakonec dopadne tak, že pokud třída nepočítá opravdu dobře, roztáhnou se následující příklady do dvou hodin.

Př. 1: Je dána kružnice $k\left([1;1];\sqrt{10}\right)$ a bod $P[5;-1]$. Rozhodni, zda bod *P* leží uvnitř, vně nebo na kružnici *k*. Pokud existují, najdi tečny kružnice procházející bodem *P*.

Polohu bodu *P* zjistíme z jeho vzdálenosti od středu kružnice:
$$|PS|=\sqrt{(p_1-s_1)^2+(p_2-s_2)^2}=\sqrt{(5-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{20}$$
$\Rightarrow$ bod *P* leží vně kružnice $\Rightarrow$ existují dvě tečny kružnice procházející tímto bodem.

Co víme o hledaných tečnách?
Prochází bodem *P* $\Rightarrow$ neznáme směr (ten zjistíme z toho, že přímka je tečnou) $\Rightarrow$ zapíšeme tečny pomocí parametru ve směrnicovém tvaru a najdeme správnou hodnotu parametru podle počtu průsečíků s kružnicí *k*.
Přímky procházejí bodem $P[5;-1]$: $(y+1)=k(x-5)$ $\Rightarrow$ $y=kx-5k-1$ + svislá přímka $x=5$.
Dosadíme do středové rovnice kružnice: $(x-1)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(kx-5k-1-1)^2=10$.
$$(x-1)^2+(kx-5k-2)^2=10$$
$$x^2-2x+1+k^2x^2-5k^2x-2kx-5k^2x+25k^2+10k-2kx+10k+4=10$$
$$\left(1+k^2\right)x^2-10k^2x-4kx-2x+25k^2+20k-5=0$$
$$\left(1+k^2\right)x^2-2\left(5k^2+2k+1\right)x+5\left(5k^2+4k-1\right)=0$$
Počet řešení závisí na hodnotě diskriminantu. Hledáme tečnu $\Rightarrow$ chceme jediný průsečík $\Rightarrow$ jediné řešení $\Rightarrow$ hledáme nulový diskriminant.
$$D=b^2-4ac=\left[-2\left(5k^2+2k+1\right)\right]^2-4\left(1+k^2\right)\cdot 5\left(5k^2+4k-1\right)=0$$
$$=4\left(25k^4+10k^3+5k^2+10k^3+4k^2+2k+5k^2+2k+1\right)-20\left(5k^2+4k-1+5k^4+4k^3-k^2\right)=$$
$$=4\left(25k^4+20k^3+14k^2+4k+1\right)-20\left(5k^4+4k^3+4k^2+4k-1\right)=$$
$$=100k^4+80k^3+56k^2+16k+4-100k^4-80k^3-80k^2-80k+20=$$
$$=-24k^2-64k+24=0$$
$$=3k^2+8k-3=0$$
Požadované hodnoty parametru *k* najdeme vzorcem pro kvadratickou rovnici:

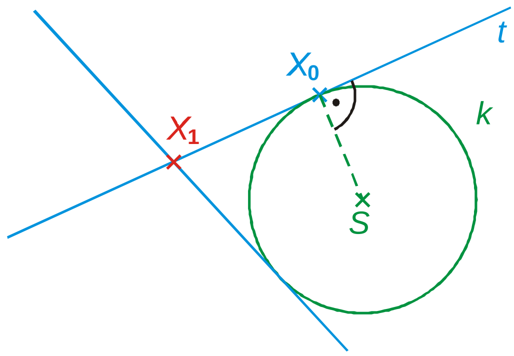
$$k_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 3\cdot(-3)}}{2\cdot 3}=\frac{-8\pm 10}{6}$$

- $k_1=\frac{-8-10}{6}=-3 \quad \Rightarrow$ Tečna $(y+1)=-3(x-5) \Rightarrow 3x+y-14=0$
- $k_2=\frac{-8+10}{6}=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow$ Tečna $(y+1)=\frac{1}{3}(x-5) \Rightarrow x-3y-8=0$

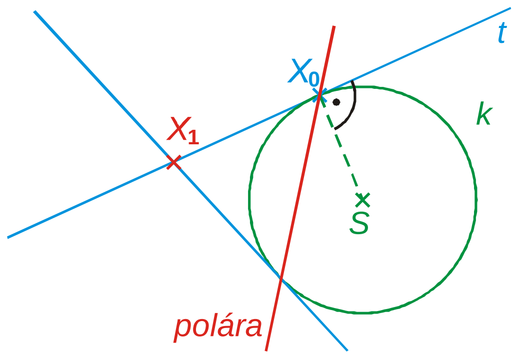
Z bodu $P[5;-1]$ je možné vést ke kružnici $k([1;1];\sqrt{10})$ dvě tečny: $3x+y-14=0$ a $x-3y-8=0$.

Řešení předchozího příkladu rozhodně nebylo snadné (i přes to, že nakonec vyšla „pěkná“ čísla). Tečny jde naštěstí nalézt i rychleji.

Opět předeme na jiné značení. Je dána kružnice $k([m;n];r)$ a bod $X_1[x_1;y_1]$.
Předpokládáme, že bod X_1 leží vně kružnice (kdyby ležel uvnitř, není možné tečnu sestrojit, kdyby ležel na kružnici, můžeme tečnu sestrojit pomocí rovnice tečny z minulé hodiny).
Když sestrojíme tečnu kružnice z bodu X_1 získáme tečný bod X_0.



Bod X_1 leží na tečně ke kružnici *k* procházející bodem X_0. Rovnici této přímky jsme odvodili minulou hodinu $\Rightarrow$ bod X_1 leží na přímce $(x_0-m)(x-m)+(y_0-n)(y-n)=r^2$ $\Rightarrow$ rovnice musí vyjít, pokud do ní dosadíme bod $X_1[x_1;y_1]$ $\Rightarrow$
$(x_0-m)(x_1-m)+(y_0-n)(y_1-n)=r^2$ - toto není rovnice přímky, ale rovnost dvou konkrétních čísel, neobsahující žádnou proměnou.
My bohužel neznáme bod $X_0[x_0;y_0]$, proto v předchozí rovnosti místo souřadnic bodu $X_0[x_0;y_0]$ napíšeme neznámé *x*, *y*: $(x-m)(x_1-m)+(y-n)(y_1-n)=r^2$.
Co tento výraz znamená?
Pokud platí $X_1[x_1;y_1]\neq S[m;n]$ (vynulovala by se celá levá strana), jedná se o rovnici přímky, která je určena kružnicí $k([m;n];r)$ a bodem $X_1[x_1;y_1]$. Na této přímce určitě leží oba tečné body, které získáme po sestrojení tečen z bodu X_1 ke kružnici *k*. Tato přímka se nazývá **polára bodu X_1 vzhledem ke kružnici *k***.



Polára bodu $X_1[x_1;y_1]$ vzhledem ke kružnici $k([m;n];r)$ má rovnici

$$(x-m)(x_1-m)+(y-n)(y_1-n)=r^2.$$

Mnemotechnická pomůcka na zapamatování je stejná jako u rovnice tečny.

- Středová rovnice kružnice $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$.
- Rozložíme dvojčleny: $(x-m)(x-m)+(y-n)(y-n)=r^2$.
- V každém součinu zaměníme jedno x za x_1 (a jedno y za y_1): $(x_1-m)(x-m)+(y_1-n)(y-n)=r^2$.

Tečné body jsou průsečíky poláry s kružnicí. Jakmile je vypočteme, můžeme napsat rovnice tečen pomocí rovnice pro tečnu.

Př. 2: Je dána kružnice $k([1;1];\sqrt{10})$ a bod $P[5;-1]$. Najdi tečny kružnice k procházející bodem P pomocí rovnice poláry a rovnice tečny.

Hledání poláry

Nejdříve napíšeme středovou rovnici kružnice k: $(x-1)^2+(y-1)^2=10$.

Rovnice poláry: $(x-1)(5-1)+(y-1)(-1-1)=10$

$4(x-1)-2(y-1)=10$

$4x-2y-12=0$

$2x-y-6=0$

Průsečíky poláry s kružnicí (tečné body)

Hledáme průsečíky poláry s kružnicí k: $2x-y-6=0 \Rightarrow y=2x-6$.

Dosadíme do rovnice kružnice: $(x-1)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(2x-6-1)^2=10$.

$(x-1)^2+(2x-7)^2=x^2-2x+1+4x^2-28x+49=10$

$5x^2-30x+40=0$

$x^2-6x+8=0$

$(x-4)(x-2)=0$

Dopočítání druhé souřadnice tečných bodů a odpovídající tečny

- $x_1=4 \Rightarrow y_1=2x_1-6=2\cdot4-6=2 \Rightarrow$ tečný bod $T_1[4;2]$.

  Rovnice tečny kružnice k v tomto bodě: $(x-1)(4-1)+(y-1)(2-1)=10$.

$3(x-1)+(y-1)=10$

$3x+y-14=0$ (stejná rovnice jako v předchozím řešení)

- $x_2=2 \Rightarrow y_1=2x_1-6=2\cdot 2-6=-2 \Rightarrow$ tečný bod $T_2[2;-2]$.

Rovnice tečny kružnice *k* v tomto bodě: $(x-1)(2-1)+(y-1)(-2-1)=10$.

$(x-1)-3(y-1)=10$

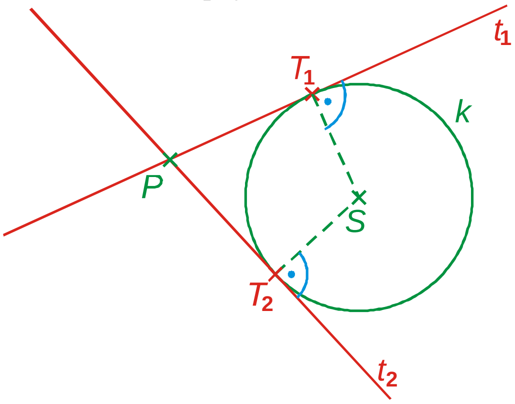
$x-3y-8=0$ (stejná rovnice jako v předchozím řešení)

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad způsobuje některým studentům problémy kvůli orientaci v tom, co je konstanta ze zadání a co je neznámá. V takovém případě pomůže sestavování rovnice poláry pomocí barevných křídy (barvy odpovídají barvám na obrázku). V textu není barevné rozlišení použito úmyslně.

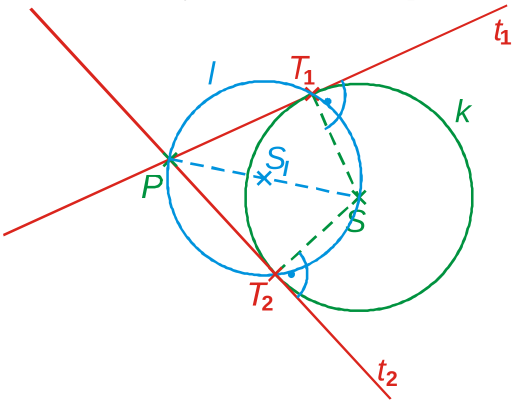
Pedagogická poznámka: Hodně studentů má problémy pojmout celý příklad a ve chvíli, kdy spočtou tečné body, neví jak dál.

Př. 3: Je dána kružnice $k([1;1];\sqrt{10})$ a bod $P[5;-1]$. Najdi tečny kružnice *k* procházející bodem *P*. Při řešení využij úhly, které svírá tečna se spojnicí tečného bodu a středu kružnice.

Tečna svírá se spojnicí tečného bodu se středem kružnice pravý úhel.



$\Rightarrow$ Tečné body můžeme nalézt pomocí Thaletovy kružnice *l* sestrojené nad průměrem *PS*.



Střed kružnice *l* = střed úsečky *PS* $\Rightarrow$ $S_l=S_{PS}\left[\frac{5+1}{2};\frac{-1+1}{2}\right]=[3;0]$.

Poloměr kružnice l: $r_1 = \frac{|PS|}{2} = \frac{\sqrt{(p_1 - s_1)^2 + (p_2 - s_2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{(5-1)^2 + (-1-1)^2}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$.

Středová rovnice kružnice $l\left([3;0];\sqrt{5}\right)$: $(x-3)^2 + y^2 = 5$.

Středová rovnice kružnice $k\left([1;1];\sqrt{10}\right)$: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$.

Získali jsme soustavu dvou kvadratických rovnic:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 5$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 10$$

$$x^2 + y^2 - 6x = -4$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$$

$$x^2 + y^2 - 6x = -4$$
$$[\![1]\!] - [\![2]\!] \qquad -4x + 2y = -12 \ \Rightarrow y = 2x - 6$$

$$x^2 + y^2 - 6x = x^2 + (2x-6)^2 - 6x = -4$$
$$x^2 + 4x^2 - 24x + 36 - 6x = -4$$
$$5x^2 - 30x + 40 = 0$$

Získali jsme stejnou rovnici jako v předchozím příkladě, kdy jsme tečné body hledali pomocí poláry $\Rightarrow$ dále už postupujeme stejně.

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$
$$(x-4)(x-2) = 0$$

Dopočítáme druhé souřadnice tečných bodů a odpovídající tečny:

- $x_1 = 4 \ \Rightarrow \ y_1 = 2x_1 - 6 = 2\cdot 4 - 6 = 2 \ \Rightarrow$ tečný bod $T_1[4;2]$.

  Rovnice tečny kružnice k v tomto bodě: $(x-1)(4-1) + (y-1)(2-1) = 10$.

  $3(x-1) + (y-1) = 10$

  $3x + y - 14 = 0$ (stejná rovnice jako v předchozím řešení)

- $x_2 = 2 \ \Rightarrow \ y_1 = 2x_1 - 6 = 2\cdot 2 - 6 = -2 \ \Rightarrow$ tečný bod $T_2[2;-2]$.

  Rovnice tečny kružnice k v tomto bodě: $(x-1)(2-1) + (y-1)(-2-1) = 10$.

  $(x-1) - 3(y-1) = 10$

  $x - 3y - 8 = 0$ (stejná rovnice jako v předchozím řešení)

Př. 4: Petáková:
strana 130/cvičení 91 b)
strana 130/cvičení 92 b)
strana 130/cvičení 93 b)

Shrnutí: Tečnu kružnice můžeme najít pomocí počtu průsečíků parametricky nebo využitím speciálních vlastností.